

超静定桁架结构的有限元计算方法研究及应用

吴阿林

(浙江科技学院 基础部,浙江 杭州 310012)

摘 要: 基于虚功原理的有限元矩阵力法,推导出求解超静定桁架结构静力分析中的基本未知力的矩阵计算公式,该公式适用于编制程序。文中还以斜索桥为例进行计算,并与通用程序计算结果进行了比较。

关键词: 基本体系;基本结构;有限元方法;静力分析

中图分类号: TU12

文献标识码: A

文章编号: 1671-8798(2003)01-0012-06

矩阵位移法和矩阵力法应用于结构计算已有相当长的历史,随着近代计算机运算技术和计算方法的不断创新和发展;矩阵位移法和矩阵力法,特别是结合了有限元方法的有限元矩阵力法,借助计算机的高速运算,有了简明的描述形式和广泛的应用。

1 静定桁架结构基本体系下的基本方程

超静定桁架结构从受力上看,反力或内力的未知量总数多于能建立的独立平衡方程数,因此,仅利用平衡方程不能全部解决反力或内力的计算。在 n 个自由度的超静定桁架结构问题中,首先选择解除多余约束的基本结构(fundamental structure),引进多余约束力作为基本未知量,建立超静定桁架结构的基本体系(fundamental system)。通过超静定桁架结构有限单元划分,在单元节点处的横截面的联系可以解决的条件下,基本未知量 \bar{X} 满足下列基本矩阵方程^[1]:

$$\{\bar{\delta}_0\} + [\bar{\Delta}]\{\bar{X}\} = \{\bar{0}\} \quad (1)$$

方程(1)中 $\{\bar{\delta}_0\}$ 为整体变形位移矩阵, $[\bar{\Delta}]$ 为整体弹性应变矩阵。通过基于虚功原理的有限元矩阵力法可推导出矩阵方程(1)相应的系数矩阵计算公式,可编制计算程序。

1.1 外部整体效应向量位移矩阵 $\{\bar{\delta}_0\}$

概括了整体变形的向量位移矩阵 $\{\bar{\delta}_0\}$ 给出的外部荷载的整体影响效应。每列元素 $\bar{\delta}_{0,i}^*$ 为基本结构沿基本未知量方向的外部荷载引起的位移,计算公式如下^[2]:

$$\bar{\delta}_{0,i}^* = \sum_{N=1}^m \left(\int_0^l \frac{M_x M_p}{EI} dx + \int_0^l \frac{N_x N_p}{EI} dx \right)^{(N)} \quad (2)$$

方程(2)中 M_x 和 N_x 为基本结构受虚拟单位荷载力 $\bar{X}_i = 1$ 作用下的单元节点力矩和力。 M_p 和 N_p 为每个有限单元受外部荷载力 $\{\bar{p}\}$ 引起的单元节点力矩和力。方程(2)中每个积分必须对每个有限单元

收稿日期:2002-11-05

作者简介:吴阿林(1963—),男,浙江东阳人,讲师,主要从事数学教学,研究方向为计算数学。

单独计算。通过单元积分计算,方程(2)可化为方程:

$$\bar{\delta}_{0,i}^* = \sum_{N=1}^m \left(\{ \bar{b}_x^* \}^T \{ f \}_i \{ \bar{b}_p^* \} \{ \bar{P} \} \right)^{(N)} \quad (i = 1, 2, \dots, m)$$

对所有单元进行叠加,整理后可得矩阵方程:

$$\{ \bar{\delta}_0^* \} = \{ b_x^* \}^T [F] \{ b_p^* \} \{ \bar{P} \} \quad (3)$$

其中短阵 $\{ b_x^* \}$ 的第 i 列 $\{ b_{x=i}^* \}$ 为基本结构受虚拟单位未知力 $\bar{X}_i = 1$ 作用下所有单元端点力矩阵。

短阵 $\{ b_p^* \}$ 的第 j 列 $\{ b_{p=j}^* \}$ 为基本结构受虚拟单位外部荷载力作用下的所有单元端点力矩阵。矩阵 $[F]$ 为相应的有限单元弹性应变矩阵。

1.2 基本未知量的计算公式

在选定基本结构下,方程(1)整体弹性应变矩阵 $[\Delta^*]$ 与基本结构的整体弹性应变矩阵相同^[1]:

$$\bar{\Delta}^* = \bar{F}^* \quad (4)$$

利用虚功原理可得计算公式^[2]:

$$\bar{\Delta}_{ij}^* = \sum_{N=1}^m \left(\int_0^l \frac{M_i M_j}{EI} dx + \int_0^l \frac{N_i N_j}{EI} dx \right)^{(N)}$$

其中 M_i 和 N_i 为基本结构受虚拟单位荷载力 $\bar{X}_i = 1$ 作用下的单元节点力矩和力, M_j 和 N_j 为基本结构受虚拟单位荷载力 $\bar{X}_j = 1$ 作用下的单元节点力矩和力。积分后可化为矩阵表达式:

$$\bar{\Delta}_{ij}^* = \sum_{N=1}^m \left(\{ b_{x=i}^* \}^T \{ f \}_1 \{ b_{x=j}^* \} \right)^{(N)} = \begin{pmatrix} \{ b_{x=i}^* \}^{(1)} \\ \{ b_{x=i}^* \}^{(2)} \\ \dots \\ \{ b_{x=i}^* \}^{(m)} \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \{ f \}_1^{(1)} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \{ f \}_1^{(2)} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \{ f \}_1^{(m)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \{ b_{x=j}^* \}^{(1)} \\ \{ b_{x=j}^* \}^{(2)} \\ \dots \\ \{ b_{x=j}^* \}^{(m)} \end{pmatrix} \quad (5)$$

对所有单元进行叠加,整理后可得:

$$[\bar{\Delta}^*] = [b_x^*]^T [F] [b_x^*] \quad (6)$$

其中 $[F]$ 为基本结构的整体应变矩阵^[1]

$$[b_x^*] = \begin{pmatrix} \{ b_{x=1}^* \}^{(1)} & \{ b_{x=2}^* \}^{(1)} & \{ b_{x=3}^* \}^{(1)} & \dots & \{ b_{x=r}^* \}^{(1)} \\ \{ b_{x=1}^* \}^{(2)} & \{ b_{x=2}^* \}^{(2)} & \{ b_{x=3}^* \}^{(2)} & \dots & \{ b_{x=r}^* \}^{(2)} \\ \{ b_{x=1}^* \}^{(3)} & \{ b_{x=2}^* \}^{(3)} & \{ b_{x=3}^* \}^{(3)} & \dots & \{ b_{x=r}^* \}^{(3)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \{ b_{x=1}^* \}^{(m)} & \{ b_{x=2}^* \}^{(m)} & \{ b_{x=3}^* \}^{(m)} & \dots & \{ b_{x=r}^* \}^{(m)} \end{pmatrix} \quad (r \text{ 为未知力个数}, m \text{ 为节点力个数})$$

由矩阵方程(3)和(6)可得方程(1)的变形:

$$\{ b_x^* \}^T [F] \{ b_p^* \} \{ \bar{P} \} + [b_x^*]^T [F] [b_x^*] \{ \bar{X} \} = \{ 0 \} \quad (7)$$

解方程(7)得: $\{ \bar{X} \} = -B^{-1}A \{ \bar{P} \}$

其中 $A = [b_x^*]^T [F] [b_p^*]$ $B = [b_x^*]^T [F] [b_x^*]$

2 超静定桁架结构全部反力或内力的计算公式

由力的叠加原理可得结构全部反力或内力为:

$$\{S\} = \{S_f\} + \{S_p^*\} + \{S_x\} = \{S_f\} + [b_p^*] \{\bar{P}\} + \{b_x^*\} \{\bar{X}\}$$

3 斜索桥静力分析中的应用

斜索桥的尺寸、荷载、截面常量及坐标如图 1 所示。基本结构选择、基本未知量和等效外力如下。

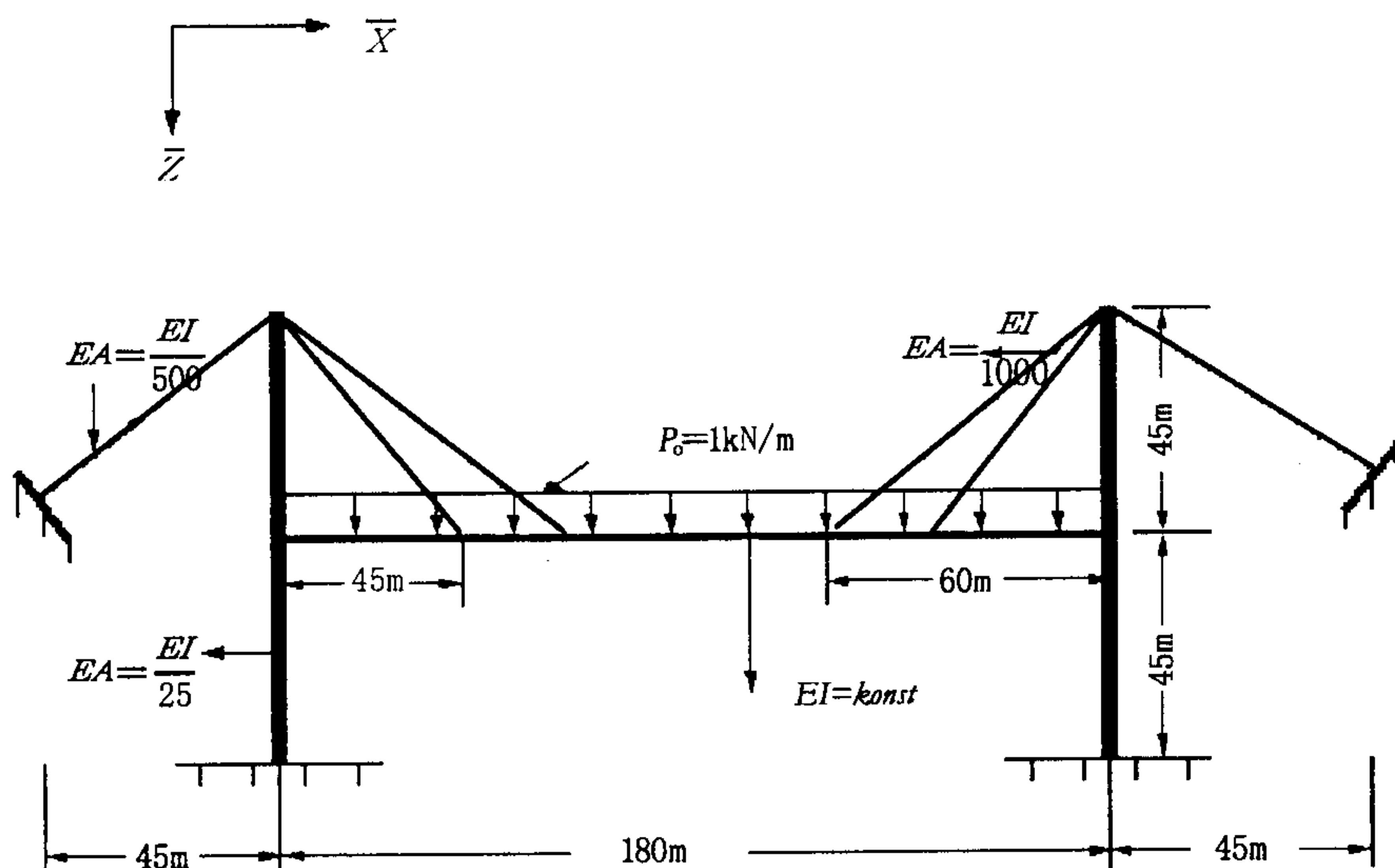


图 1 斜索桥的尺寸、荷载、截面常量及坐标

3.1 单元端点力及坐标系

单元端点应力只考虑力矩和轴向力,左端点力用第一下标“1”表示,右端点力用第二下标“2”表示(如图 2)。

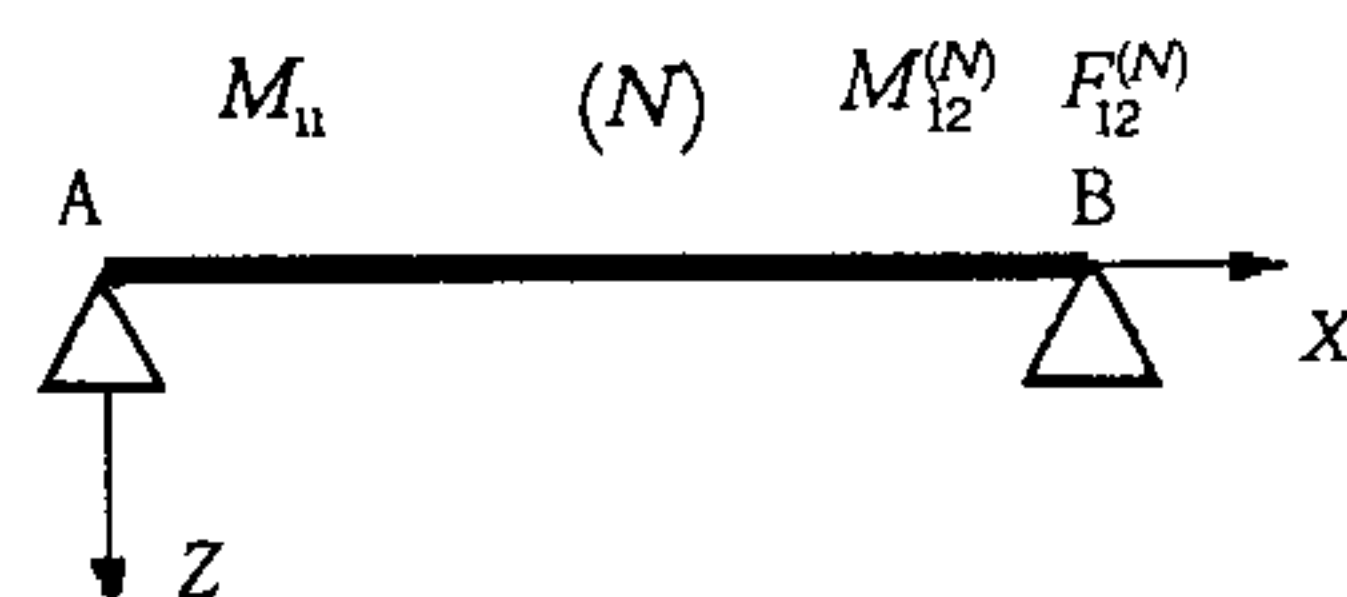


图 2 单元端点力及坐标系

3.2 基本结构、基本未知量及单元和节点力数 k^*

利用对称性计算静力时只考虑一半,结构划分 8 个单元共计 15 个节点力(如图 3)。

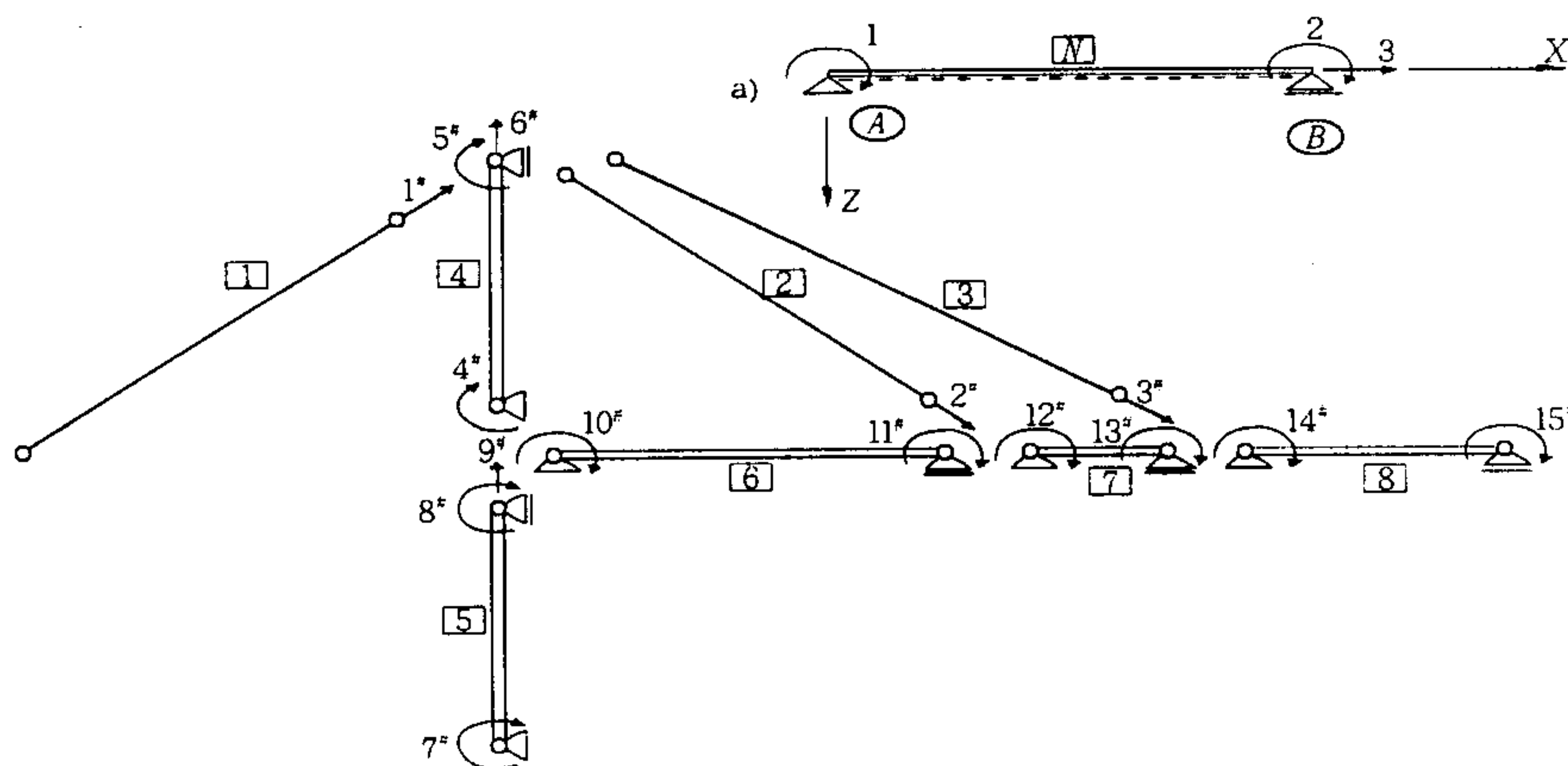


图 3 基本结构、基本未知量及单元和节点力数 k^*

3.3 等效外力 $\{\bar{p}\}$

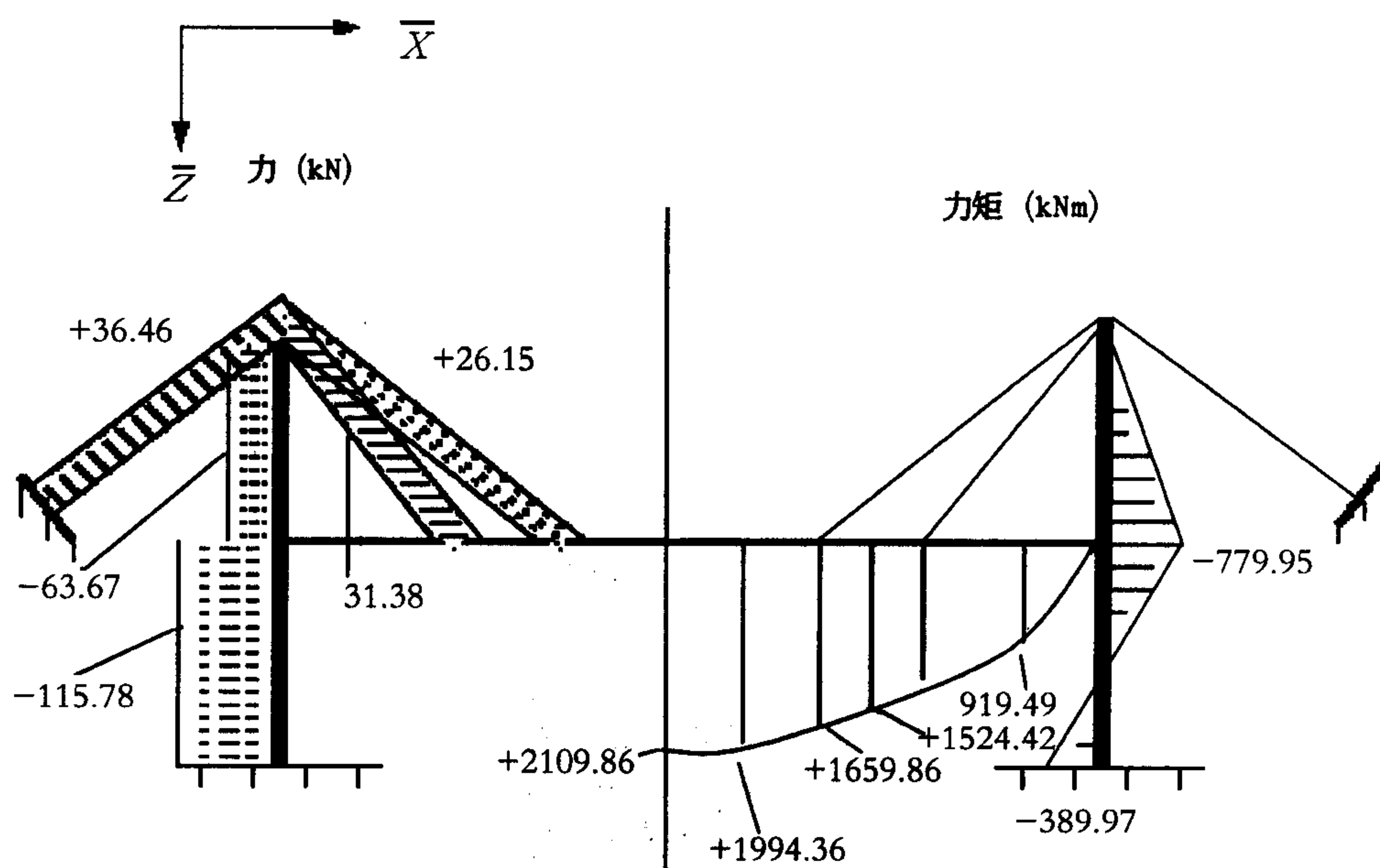


图 5 斜索桥应力分析示意

4 结束语

利用虚功原理和有限元方法, 可以将超静定结构基本方程的求解过程化为适合于编程计算的矩阵形式: 应变刚度矩阵 $[F]$ 叠加、联结矩阵 $[\bar{b}_*]$ 和 $[\bar{b}_*]$ 的计算, 表达形式简单, 适合编程, 可应用于各种超静定桁架结构的静力计算, 广泛应用于工程计算。

参考文献:

- [1] Mohr, Ch. Über die Darstellung des Spannungszustandes und des Deformationszustandes eines Korperelements und über die Anwendung derselben in der Festiglehre[M]. Berlin: Civilingenieur28, 1956. 437 - 457.
- [2] 王焕定. 结构力学[M]. 北京: 高等教育出版社, 2000. 144 - 185.

Research and application of the finite element matrix-force method in the static analysis of the exceed statically determinate truss structure

WU A-lin

(Dept. of Basic Courses, Zhejiang University of Science and Technology, Hangzhou 310012, China)

Abstract: Based on the finite element matrix-force method of the virtual work principle, the matrix-formula in the numeration of the unknown force in the static analysis of the exceed statically determinate truss structure is reasoned and used in programming. It calculates for the static analysis of cable-stayed bridge, and compares with the results of current programs.

Keywords: fundamental system; fundamental structure; the finite element method; static analysis