

P. Guldin 定理的一个新结论

胡 月¹, 杜 煜²

(1. 浙江科技学院 基础部, 浙江 杭州 310012; 2. 濮阳职业技术学院,河南 濮阳 457000)

摘要: 通过 P. Guldin 定理解决了任意旋转体体积的计算问题, 给出了任意旋转体的体积公式, 推广了已有的计算公式, 简化了已有的计算方法。从这个意义上讲, 所得到的公式是彻底的。

关键词: P. Guldin 定理; 旋转体; 体积; 计算方法

中图分类号: O172.2 **文献标识码:** A **文章编号:** 1671-8798(2003)02-0067-05

计算旋转体的体积在自然科学研究和工程技术实践中是经常遇到的一个问题, 现行教材中仅给出了条件要求较强的几个比较特殊的体积计算公式。文献[1]给出了弓形区域直线 $y = kx$ 旋转所生成的旋转体的体积的计算公式, 文献[2]用微元法解决了平面曲线围成的区域绕一条直线旋转所生成的旋转体的体积问题。文献[1] 和文献[2] 所要求的条件虽然比现行教材有所减弱, 但是, 所要求的边界曲线是可导的显函数。若被旋转的区域是一般的闭区域, 其边界曲线由隐函数、参数方程或极坐标方程表示时, 其对应的旋转体的体积又应该怎样计算? 在这里我们根据 P. Guldin 定理^[3], 导出平面上有界闭区域绕其同平面内直线旋转时所生成的一般旋转体的体积计算公式, 进一步给出边界曲线为连续曲线的曲边梯形绕其同平面内直线旋转所生成旋转体的体积计算公式。

1 定理及主要结论

引理(P. Guldin 定理)^[3] 平面闭区域 D 绕其同平面与它不相交的直线 L 旋转时所生成的旋转体的体积等于平面区域 D 的面积与其重心所历周长之积, 即

$$V = S \cdot 2\pi r$$

其中 S 表示平面区域 D 的面积, r 表示平面区域 D 的重心到直线 L 的距离。

定理 若平面闭区域 D 在同一平面的一条直线 $L: Ax + By + C = 0$ 的一侧, 则 D 绕 L 旋转一周所生成的旋转体的体积为

$$V = \frac{2\pi}{\sqrt{A^2 + B^2}} \left| \iint_D (Ax + By + C) dx dy \right| \quad (1)$$

证明: 设 $G(\zeta, \eta)$ 为平面区域 D 的重心, 则 $\zeta = \frac{\iint_D x dx dy}{S}$, $\eta = \frac{\iint_D y dx dy}{S}$, 其中 $S = \iint_D dx dy$

设重心 $G(\zeta, \eta)$ 到直线 $L: Ax + By + C = 0$ 的距离为 r , 则

收稿日期: 2003-04-01

作者简介: 胡 月(1964—), 男, 河南西峡人, 副教授, 理学硕士, 主要从事计算数学研究和数学教学研究。

$$r = \frac{|A\zeta + B\eta + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \left| \frac{\iint_D (Ax + By + C) dx dy}{S \sqrt{A^2 + B^2}} \right|$$

由引理得,平面闭区域 D 绕直线 $L: Ax + By + C = 0$ 旋转所生成的旋转体的体积为

$$V = S \cdot 2\pi r = S \cdot 2\pi \left| \frac{\iint_D (Ax + By + C) dx dy}{\sqrt{A^2 + B^2}} \right| = \frac{2\pi}{\sqrt{A^2 + B^2}} \left| \iint_D (Ax + By + C) dx dy \right|$$

推论 1 设曲线 C 为 $y = f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的连续曲线弧 \widehat{AB} ,且在直线 $L: y = mx + n$ 的一侧,点 $A'、B'$ 为点 $A、B$ 在直线 L 上的投影,则曲边梯形 $ABB'A'$ 绕直线 L 旋转所生成的旋转体的体积为

$$V = \left| \frac{\pi}{\sqrt{1+m^2}} \int_a^b [mx + n - f(x)]^2 dx + \frac{m\pi}{3(1+m^2)^{3/2}} [ma + n - f(a)]^3 - [mb + n - f(b)]^3 \right| \quad (2)$$

证明:由已知 $A'、B'$ 分别为在直线 $L: y = mx + n$ 上的投影(图 1),显然 AA', BB' 方程分别为 $y = f(a) - \frac{x-a}{m}$, $y = f(b) - \frac{x-b}{m}$,则 $A'、B'$ 的横坐标分别为 $x_{A'} = \frac{a+m[f(a)-n]}{1+m^2}$ 和 $x_{B'} = \frac{b+m[f(b)-n]}{1+m^2}$,过

点 $A、B$ 分别作与 y 轴平行的直线,交直线 L 于 $E、F$,由定理知,曲边梯形 $ABB'A'$ 绕直线 $L: y = mx + n$ 旋转所生成的旋转体的体积为

$$V = \frac{2\pi}{\sqrt{1+m^2}} \left| \iint_{ABB'A'} (mx + n - y) dx dy \right| = \\ \frac{2\pi}{\sqrt{1+m^2}} \left| \iint_{AEA'} (mx + n - y) dx dy + \iint_{EABF} (mx + n - y) dx dy - \iint_{BFB'} (mx + n - y) dx dy \right|$$

而 $\iint_{AEA'} (mx + n - y) dx dy = \int_{x_{A'}}^a dx \int_{f(a) - \frac{x-a}{m}}^{mx+n} (mx + n - y) dy = \frac{m}{6(1+m^2)} [ma + n - f(a)]^3$

$$\iint_{EABF} (mx + n - y) dx dy = \int_a^b dx \int_{f(x)}^{mx+n} (mx + n - y) dy = \frac{1}{2} \int_a^b [mx + n - f(x)]^2 dx$$

$$\iint_{BFB'} (mx + n - y) dx dy = \int_{x_{B'}}^b dx \int_{f(b) - \frac{x-b}{m}}^{mx+n} (mx + n - y) dy = \frac{m}{6(1+m^2)} [mb + n - f(b)]^3$$

即 $V = \left| \frac{\pi}{\sqrt{1+m^2}} \int_a^b [mx + n - f(x)]^2 dx + \frac{m\pi}{3(1+m^2)^{3/2}} [ma + n - f(a)]^3 - [mb + n - f(b)]^3 \right|$

推论 2 连续曲线 $C: y = f(x)$ 与直线 $L: y = mx$ 所围成的弓形区域绕直线 L 旋转所生成的旋转体的体积为

$$V = \frac{\pi}{\sqrt{1+m^2}} \int_a^b [mx - f(x)]^2 dx \quad (3)$$

其中 $a < b$,且 a, b 是曲线 $y = f(x)$ 与直线 $y = mx$ 交点的横坐标(见图 2)。

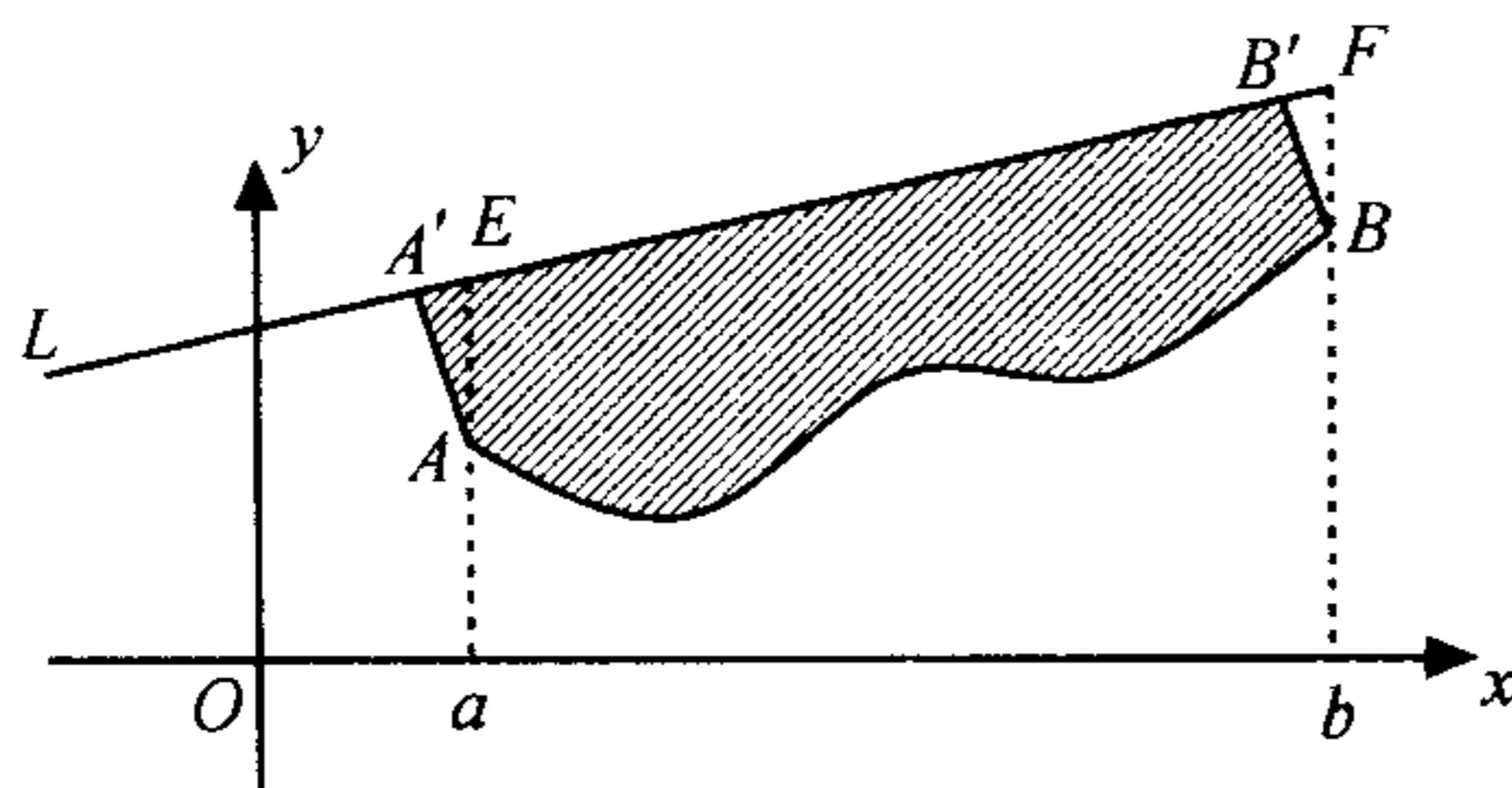


图 1 任意曲边梯形区域图

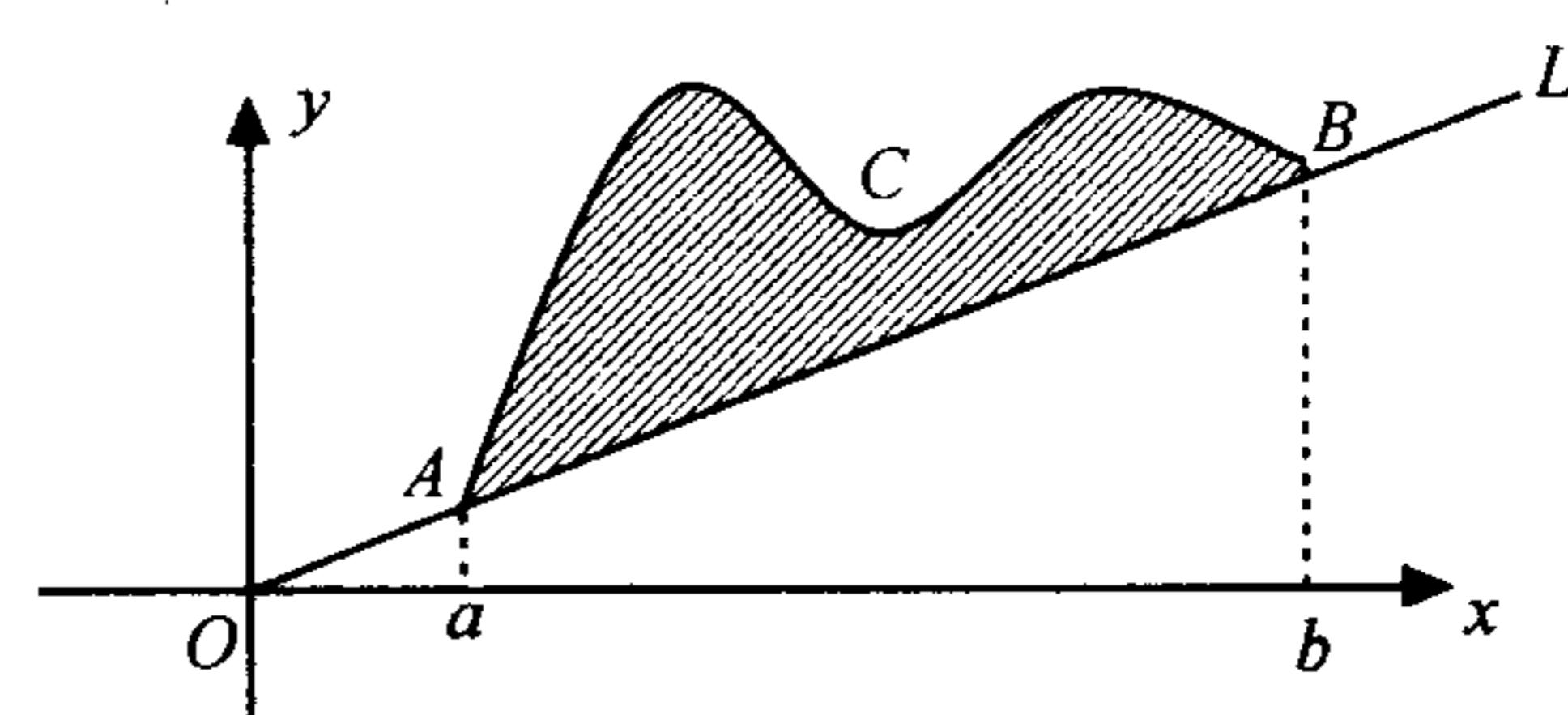


图 2 任意弓形区域图

事实上,仿照推论 1 的证明,知曲线 $y = f(x)$ 与直线 $L: y = mx$ 所围成的弓形区域绕直线 L 旋转所生成的旋转体的体积为

$$V = \frac{2\pi}{\sqrt{1+m^2}} \left| \iint_{弓形ABC} (mx - y) dx dy \right| = \frac{2\pi}{\sqrt{1+m^2}} \left| \int_a^b dx \int_{mx}^{f(x)} (mx - y) dy \right| = \\ \frac{2\pi}{\sqrt{1+m^2}} \left| \int_a^b \left\{ mx[f(x) - mx] - \frac{1}{2}[f(x) - mx]^2 \right\} dx \right| = \frac{\pi}{\sqrt{1+m^2}} \int_a^b [mx - f(x)]^2 dx$$

推论3 曲线 $y = f(x)$, 直线 $x = a, x = b$ 及 x 轴所围成曲边梯形绕 x 轴或 y 轴旋转所生成的旋转体的体积为

$$V_x = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx \quad (4)$$

$$V_y = 2\pi \int_a^b x |f(x)| dx (a > 0) \quad (5)$$

证明:(1) 当绕 x 轴旋转时(见图3),轴方程为 $y = 0$,由定理得

$$V_x = \frac{2\pi}{\sqrt{1+0^2}} \left| \iint_D (0 + 0 - y) dx dy \right| = 2\pi \left| \int_a^b \int_0^{f(x)} y dy \right| = \pi \int_a^b f^2(x) dx$$

即:

$$V_x = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx$$

(2) 当绕 y 轴旋转时(见图3),轴方程为 $x = 0$,由定理得

$$V_y = \frac{2\pi}{\sqrt{1+0^2}} \left| \iint_D x dx dy \right| (D \text{ 为曲边梯形}) = \\ 2\pi \left| \int_a^b dx \int_0^{f(x)} x dy \right| = 2\pi \left| \int_a^b xf(x) dx \right| = 2\pi \int_a^b x |f(x)| dx (a > 0)$$

即:

$$V_y = 2\pi \int_a^b x |f(x)| dx$$

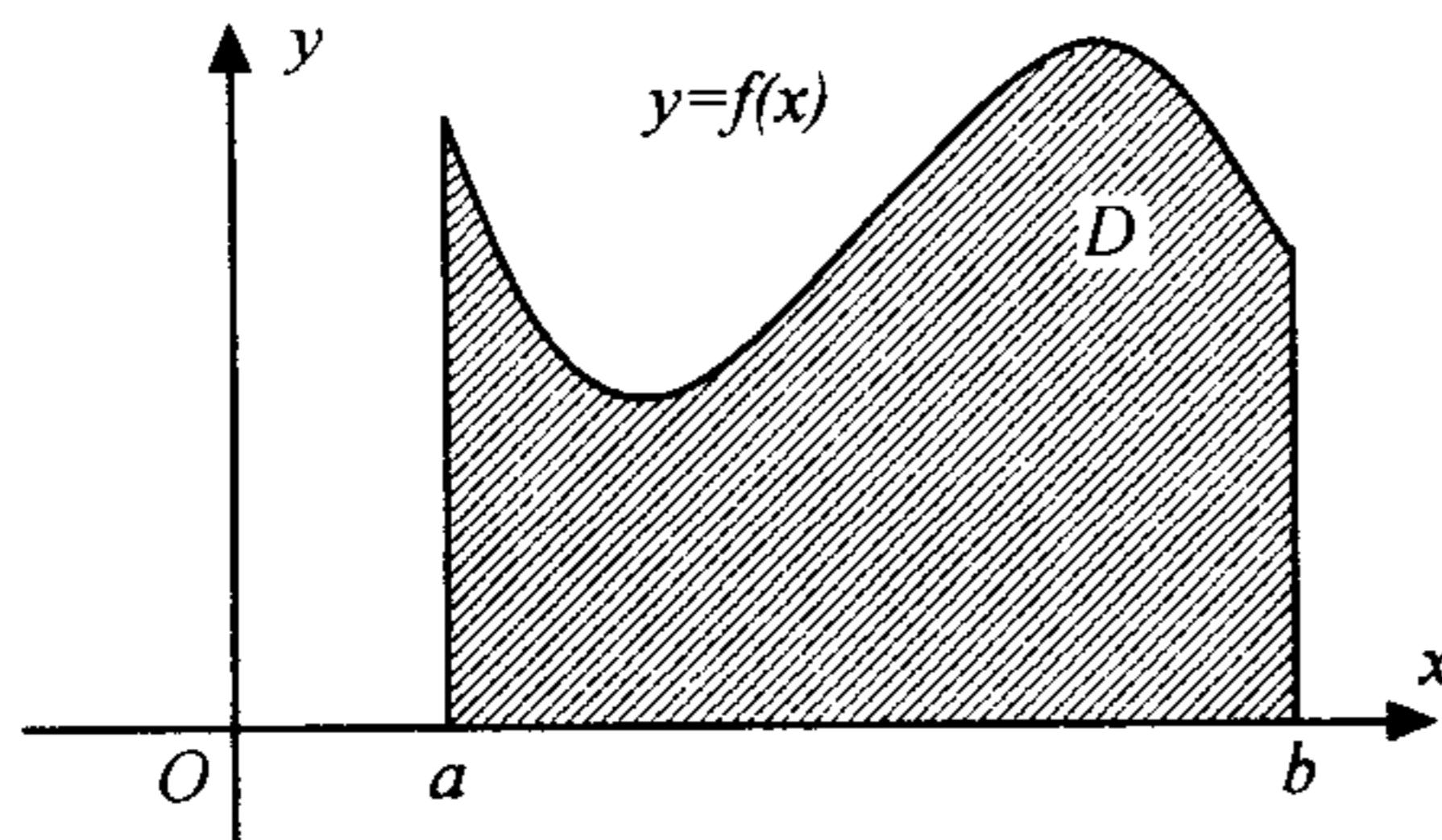


图3 曲边梯形区域图

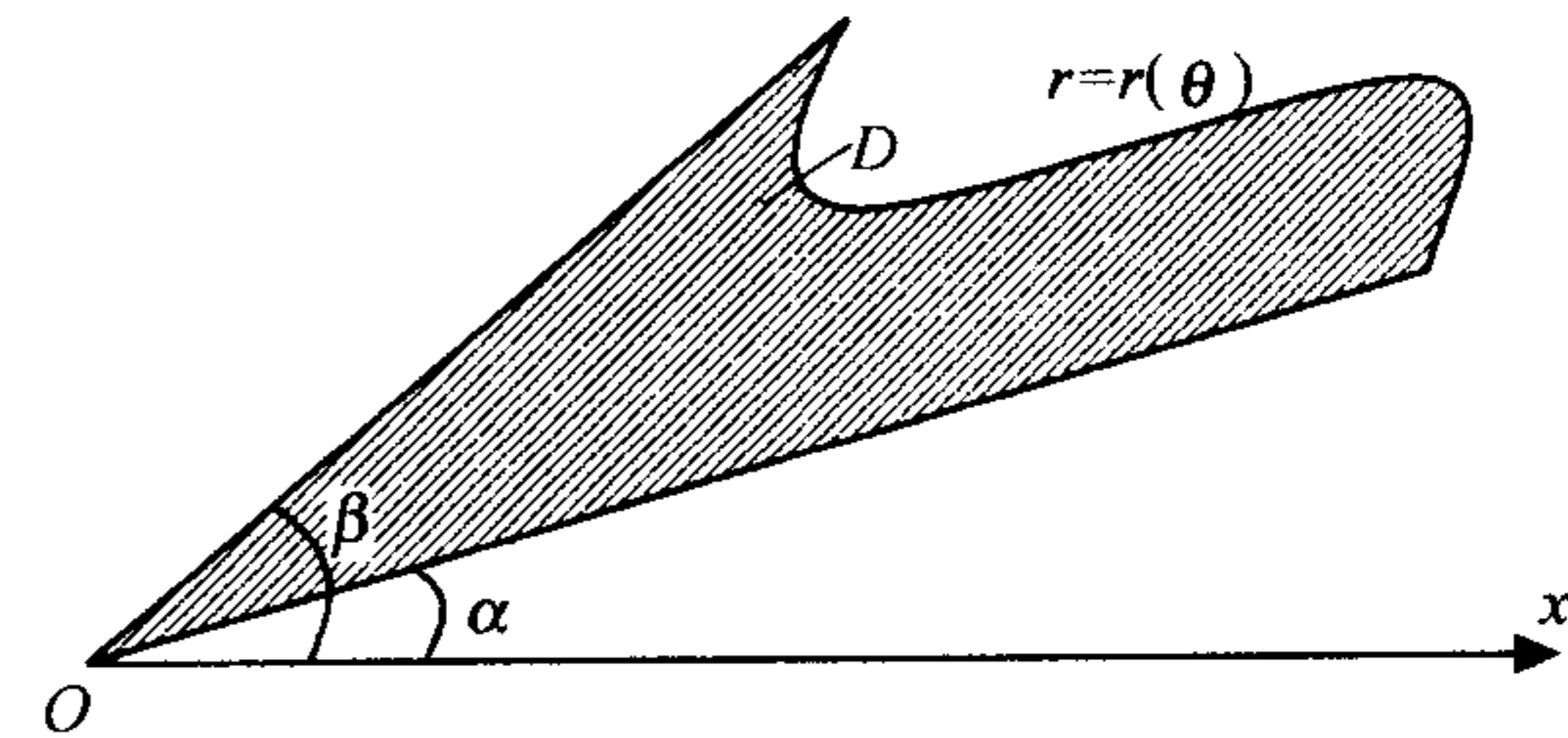


图4 曲边扇形区域图

推论4 如果曲线 $r = r(\theta)$ 和射线, $\theta = \alpha, \theta = \beta$ 为边界的曲边扇形绕极轴旋转所生成的旋转体(见图4)的体积为

$$V = \frac{2}{3}\pi \left| \int_{\alpha}^{\beta} r^3(\theta) \sin\theta d\theta \right| \quad (6)$$

事实上,由 P.Guldin 定理得

$$V = 2\pi rs = 2\pi \left| \frac{\iint_D y dx dy}{\iint_D dx dy} \right| \iint_D dx dy = 2\pi \left| \iint_D y dx dy \right| = \\ 2\pi \left| \int_{\alpha}^{\beta} d\theta \int_0^{r(\theta)} r \sin\theta \cdot r dr \right| = \frac{2}{3}\pi \left| \int_{\alpha}^{\beta} r^3(\theta) \cdot \sin\theta d\theta \right|$$

2 定理及结论的应用

例1:求曲线 $y = x^2$ 与直线 $L: y = mx$ 所围成的弓形区域绕直线 L 旋转所生成的旋转体的体积。

解: 易知, 直线 $y = mx$ 与曲线 $y = x^2$ 的交点为 $O(0,0), A(m, m^2)$ (见图 5), 由式(3) 得

$$V = \frac{\pi}{\sqrt{1+m^2}} \int_0^m (mx - x^2) dx = \frac{\pi m^5}{30 \sqrt{1+m^2}}$$

例 2: 由曲线 $x = a \cos t, y = a \sin 2t (0 \leq t \leq \frac{\pi}{2})$ 和 x 轴围成的平面图形绕 y 轴旋转, 求所得旋转体的体积。

解: 易知, $0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq a$, 且当 $t = 0$ 和 $t = \frac{\pi}{2}$ 时 $y = 0$, 即所围成的平面图形是曲边梯形。由式(5) 可得

$$\begin{aligned} V_y &= 2\pi \int_0^a x(t) \cdot y(t) dt = 2\pi \int_{\pi/2}^0 a \cos t \cdot a \sin 2t (-a \sin t) dt = \\ &\pi a^3 \int_0^{\pi/2} \sin^2 2t dt = \frac{\pi}{2} a^3 \int_0^{\pi/2} (1 - \cos 4t) dt = \frac{\pi}{2} a^3 \left(t - \frac{1}{4} \sin 4t \right) \Big|_0^{\pi/2} = \frac{\pi^2 a^3}{4} \end{aligned}$$

例 3: 心脏线 $r = a(1 + \cos \theta)$ 所围成区域绕极轴旋转(如图 6), 求生成的旋转体的体积。

解: 由式(6) 得

$$V = \frac{2\pi}{3} \int_0^\pi a^3 (1 + \cos \theta)^3 \sin \theta d\theta = -\frac{2\pi}{3} a^3 \frac{(1 + \cos \theta)^4}{4} \Big|_0^\pi = \frac{8}{3} \pi a^3$$

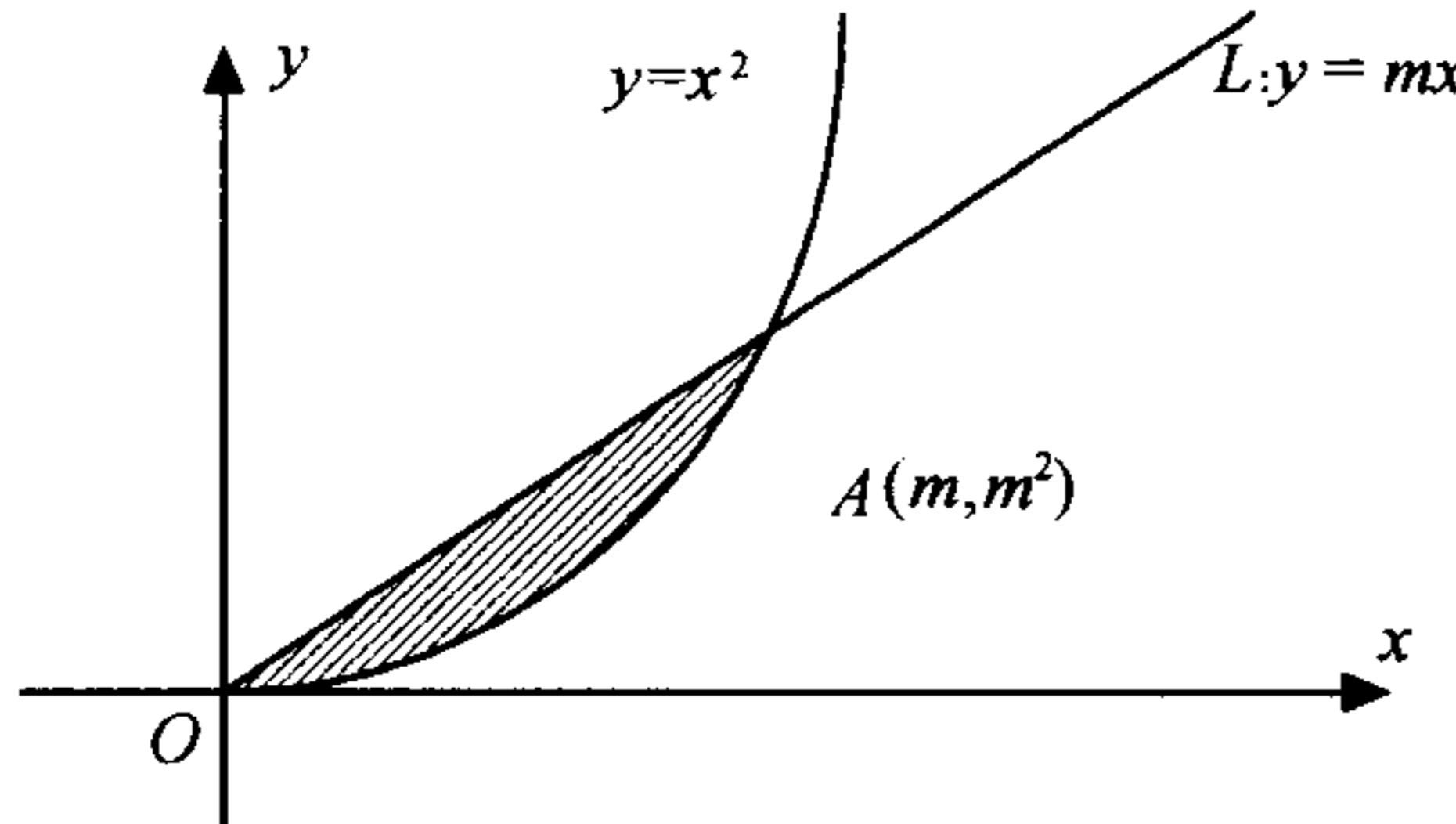


图 5 弓形区域图

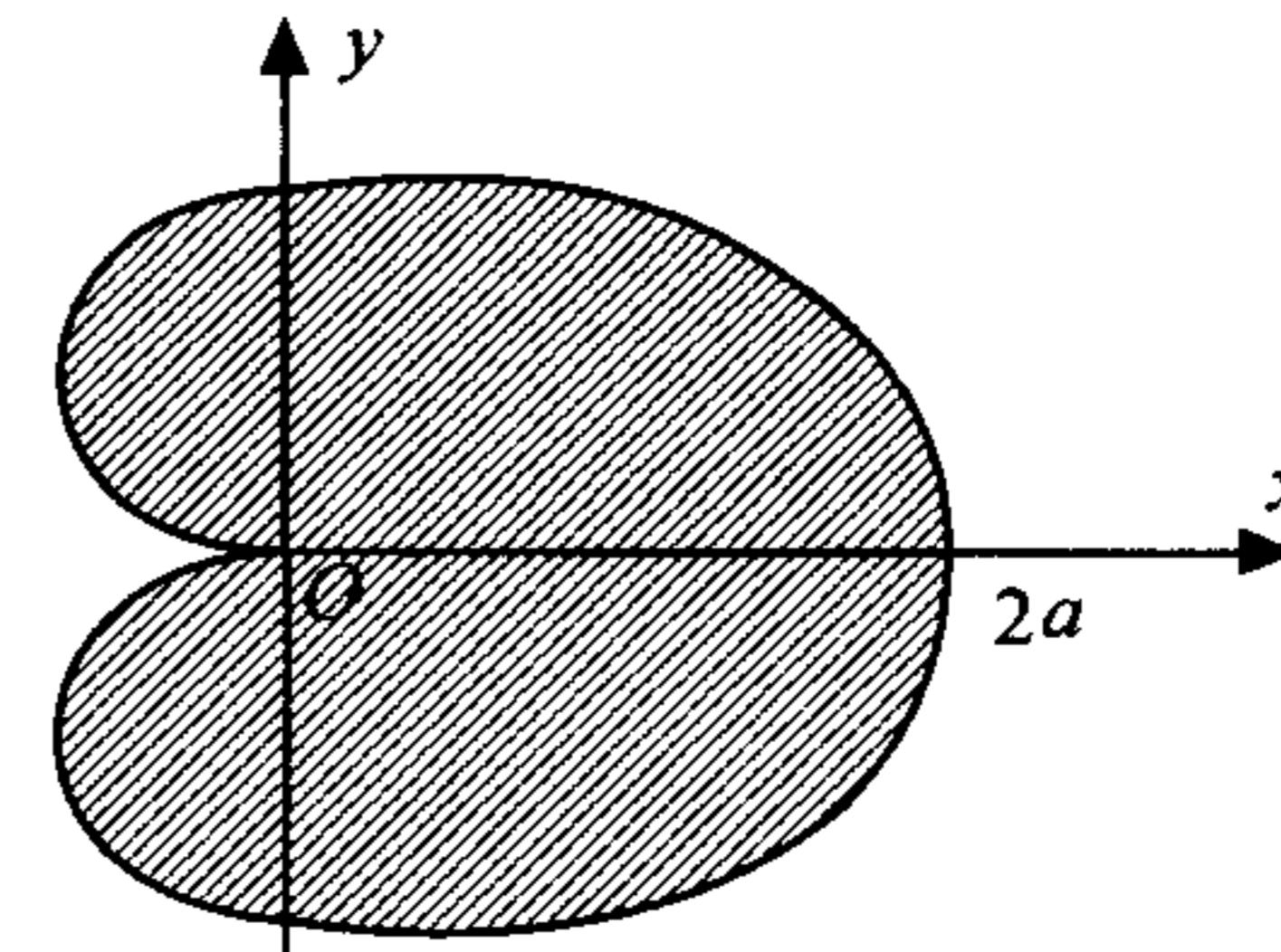


图 6 心脏形区域图

例 4: 求区域 $D: x^2 + y^2 \leq 1$ 绕直线 $l: y = x + 2$ 旋转所生成的旋转体的体积(如图 7)。

解: 直线 $l: y = x + 2$, 由式(2) 得

$$\begin{aligned} V &= \frac{2\pi}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} \left| \iint_D (y - x - 2) dx dy \right| = \sqrt{2}\pi \left| \iint_{x^2 + y^2 \leq 1} (y - x - 2) dx dy \right| = \\ &\sqrt{2}\pi \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 (r \sin \theta - r \cos \theta - 2) r dr = \sqrt{2}\pi \left| \int_0^{2\pi} \left[\frac{1}{3}(\sin \theta - \cos \theta) - 1 \right] d\theta \right| = 2\sqrt{2}\pi^2 \end{aligned}$$

例 5: 求由 $\frac{(x+y)^2}{a^2} + \frac{(x-y)^2}{b^2} = 1$ 围成的区域 D 绕直线 $l: x + y = 2a$ 旋转所生成的旋转体的体积。

解: 显然 D 是在直线 l 一侧的有界闭域, 由式(2) 得

$$V = \frac{2\pi}{\sqrt{1^2 + 1^2}} \left| \iint_D (x + y - 2a) dx dy \right| = \sqrt{2}\pi \left| \iint_D (x + y - 2a) dx dy \right|$$

设 $x + y = au, x - y = bv$ 或 $x = \frac{1}{2}(au + bv), y = (au - bv)$, 则

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{1}{2}a & \frac{1}{2}b \\ \frac{1}{2}a & -\frac{1}{2}b \end{vmatrix} = -\frac{1}{2}ab$$

因此, xoy 平面上的图形变换为 uv 平面上的图形(见图 8), 其中 D 变换为 D' , 即

$$D: \frac{(x+y)^2}{a^2} + \frac{(x-y)^2}{b^2} \leq 1, \text{ 变换为 } D': u^2 + v^2 \leq 1$$

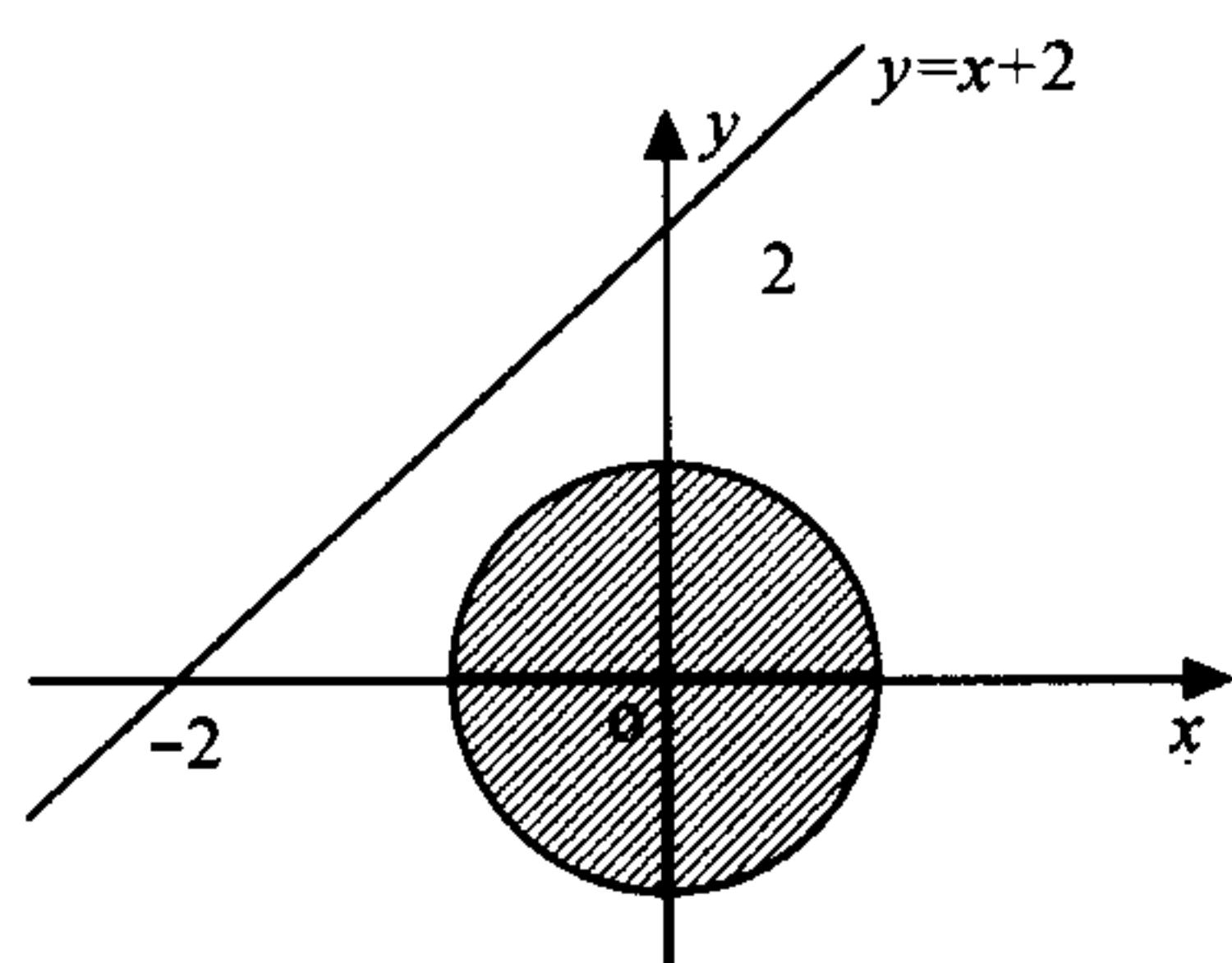


图7 圆域图

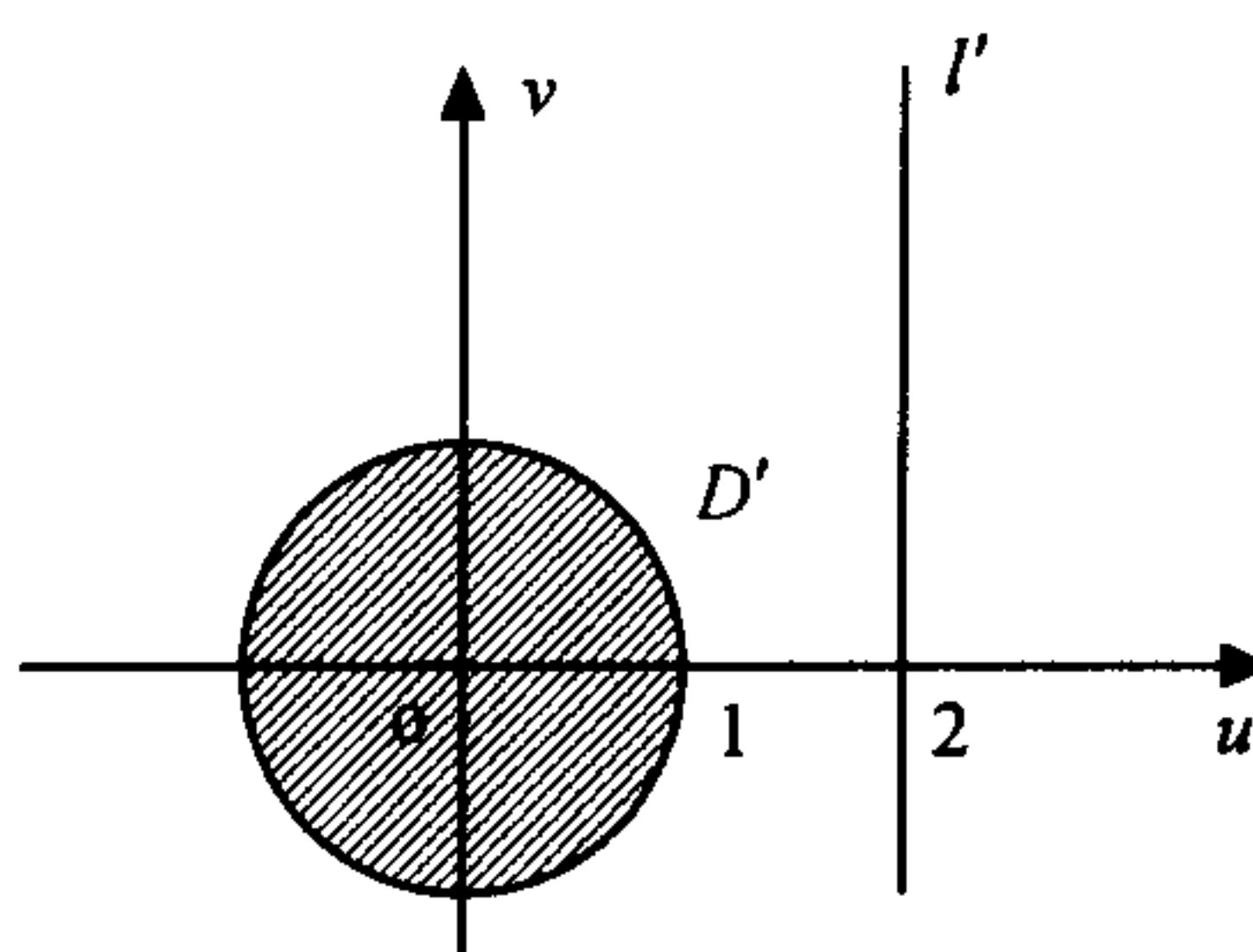


图8 区域变换图

平面 xoy 内的直线 $l: x + y = 2a$, 变换为平面 uv 内的直接 $l': u = 2$, 即所求旋转体的体积为

$$\begin{aligned} V &= \sqrt{2}\pi \left| \iint_{D'} (au - 2a) \cdot \left(-\frac{1}{2}ab\right) du dv \right| = \frac{\sqrt{2}\pi}{2} a^2 b \left| \iint_{D'} (u - 2) du dv \right| = \\ &= \frac{\sqrt{2}\pi}{2} a^2 b \left| \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 (r \cos \theta - 2) r dr \right| = \sqrt{2}\pi^2 a^2 b \end{aligned}$$

参考文献:

- [1] 曾庆黎.弓形区域绕直线 $y = kx$ 旋转所生成的立体的体积[J].数学通报,1994,(9):39-42.
- [2] 程曹宗.旋转体体积计算的一般公式[J].数学通报,1994,(10):40-41.
- [3] 格·马·赫金哥尔茨.数学分析原理[M].丁寿田译.北京:人民教育出版社,1949.417-418.

A new conclusion of P. Guldin Theorem

HU Yue¹, DU Wei²

(1. Dept. of Basic Courses, Zhejiang University of Science and Technology, Hangzhou 310012, China;
2. Puyang Vocational Technological Institute, Puyang 457000, China)

Abstract: Through P. Guldin Theorem, the author solves the computation of volume in random rotating body, offers its related formula, develops its given formula and simplifies its calculating approach. In this sense, the formula that has been got is complete.

Key words: P. Guldin Theorem; rotating body; volume; calculating approach

·科技简讯·

全自动台式捆扎机

由浙江科技学院吴作伦教授等开发的全自动台式捆扎机,主要用于书籍、邮件等小件物品捆扎,与传统捆扎机械比较,有明显优点。该机体积小,捆扎全过程由微机控制,用摩擦熔接方式粘接捆扎带,捆扎可靠,噪声小,不会产生烟雾和难闻气味。该项目属国内首创,产品前景看好,已通过省级鉴定。实施条件:具备车、刨、铣等机械加工及电路板制作能力。以年产400台计,每台售价6 000元,成本约4 000元,年利润80万元左右。

科技处