浙江科技学院学报,第 15 卷第 3 期,2003 年 9 月
Journal of Zhejiang University of Science and Technology
Vol.15 No.3, Sep. 2003

关于矩阵方程 $AXB = CYD$

张少林,薛有才
(浙江科技学院 基础部,浙江 杭州 310012)

摘　要: 应用矩阵的初等变换技巧,给出了任意域上矩阵方程 $AXB = CYD$ 的通用表达式及解法。

关键词: 矩阵方程;初等变换;域
中图分类号: O151.1　　**文献标识码**: A　　**文章编号**: 1671 - 8798(2003)03 - 0133 - 05

矩阵方程

$$AXB = CYD \tag{1}$$

是一类很重要的矩阵方程。文献[1]在复数域上用矩阵的广义逆研究了方程(1),给出了一类形式上比较复杂的通解表达式。本文运用矩阵的初等变换技巧,给出了(1)式的通解表达式,并得到一种较为实用的解法。

本文约定,F 是任意的一个域,$F^{m\times n}$ 表示 F 上的 $m\times n$ 矩阵,$F_r^{m\times n}$ 表示 F 上的所有秩为 r 的 $m\times n$ 矩阵,E_i 表示 F 上的 i 阶单位矩阵,$\mathrm{rank}A$ 表示矩阵 A 的秩。

引理 1[2]　设 $A \in F_r^{m\times n}$,则有 $P \in F_m^{m\times m}$, $Q \in F_n^{n\times n}$,使得

$$PAQ = \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}。$$

引理 2[2]　设 A, P, Q 是 F 上的可乘矩阵,且 P, Q 可逆,则

$$\mathrm{rank}A = \mathrm{rank}PA = \mathrm{rank}AQ = \mathrm{rank}PAQ。$$

引理 3[2]　设 $A \in F^{m\times n}$, F_m(或 P_n)是对单位矩阵 E_m 或(E_n)作初等行(或列)变换 T 而得到的初等矩阵,则 P_mA(或 AP_n)是对 A 作相同的初等变换 T 而得到的矩阵。

对于含有未知矩阵 X 和 Y 的矩阵方程(1),其中 $A \in F_r^{m\times n}$, $B \in F_s^{p\times q}$, $C \in F_t^{m\times k}$, $D \in F_i^{l\times q}$。

引理 4[3]　对于式(1)中的矩阵 A、B、C、D,一定含有 $P \in F_m^{m\times m}$, $Q \in F_n^{n\times n}$, $Q_0 \times F_k^{k\times k}$, $V \in F_p^{p\times p}$, $U \in F_q^{q\times q}$, $V_0 \in F_l^{l\times l}$,使

$$\text{(i)}\quad PAQ = \begin{pmatrix} M_{r\times r} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ PCQ_0 = \begin{pmatrix} 0 & E_{r_2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ E_{r_1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{(ii)}\quad VBU = \begin{pmatrix} N_{s\times s} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ V_0DU = \begin{pmatrix} 0 & 0 & E_{s_1} & 0 \\ E_{r_2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

其中,$M \in F_r^{r\times r}$, $N \in F_s^{s\times s}$。

收稿日期: 2003 - 03 - 25

作者简介: 张少林(1961—　),男,湖北监利人,硕士,副教授,主要从事计算数学、软件工程研究。

1 方法与结论

对于矩阵方程(1),我们有:

定理 设 $Q,Q_0,V,V_0,M_{r\times r},N_{s\times s}$ 同引理 4 所述,则矩阵方程(1) 的通解表达式为

$$X = Q\begin{pmatrix} M_{r\times r}^{-1} & 0 \\ 0 & E_{n-r}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\begin{pmatrix} Y_{22} & 0 \\ 0 & 0\end{pmatrix} & X_2 \\ X_3 & X_4\end{pmatrix}\begin{pmatrix} N_{s\times s}^{-1} & 0 \\ 0 & E_{p-s}\end{pmatrix}V$$

$$Y = Q_0\begin{pmatrix} 0 & 0 & Y_{12} \\ 0 & Y_{22} & Y_{23} \\ Y_{31} & Y_{32} & Y_{33}\end{pmatrix}V \text{。}$$

其中 $X_i(i = 2,3,4),Y_{13},Y_{2j}(j = 2,3),Y_{3j}(j = 1,2,3)$ 均为 F 上的相应阶数的任意矩阵。

证明 (1) 式等价于下面的矩阵方程

$$PAQQ^{-1}XV^{-1}VBU = PCQ_0Q_0^{-1}YV_0^{-1}V_0DU, \tag{1}$$

即

$$\begin{pmatrix} M_{r\times r} & 0 \\ 0 & 0\end{pmatrix}Q^{-1}XV^{-1}\begin{pmatrix} N_{s\times s} & 0 \\ 0 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & E_{r_2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ E_{r_1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}Q_0^{-1}YV_0^{-1}\begin{pmatrix} 0 & 0 & E_{s_1} & 0 \\ E_{s_2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix} \tag{2}$$

令

$$Q^{-1}XV^{-1} = \begin{pmatrix} X_1 & X_2 \\ X_3 & X_4\end{pmatrix},\ Q_0^{-1}YV_0^{-1} = \begin{pmatrix} Y_{11} & Y_{12} & Y_{13} \\ Y_{21} & Y_{22} & Y_{23} \\ Y_{31} & Y_{32} & Y_{33}\end{pmatrix} \tag{3}$$

则(2) 式可化为

$$\begin{pmatrix} M_{r\times r}X_1N_{s\times s} & 0 \\ 0 & 0\end{pmatrix} = \left(\begin{array}{cc:cc} Y_{22} & 0 & Y_{21} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hdashline Y_{12} & 0 & Y_{11} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right) \tag{4}$$

从而

$$M_{r\times r}X_1N_{s\times s} = \begin{pmatrix} Y_{22} & 0 \\ 0 & 0\end{pmatrix} \tag{5}$$

由(3) 式得

$$X = Q\begin{pmatrix} M_{r\times r}^{-1}\begin{pmatrix} Y_{22} & 0 \\ 0 & 0\end{pmatrix}N_{s\times s}^{-1} & X_2 \\ X_3 & X_4\end{pmatrix}V \tag{6}$$

$$Y = Q_0\begin{pmatrix} 0 & 0 & Y_{13} \\ 0 & Y_{22} & Y_{23} \\ Y_{31} & Y_{32} & Y_{33}\end{pmatrix}V_0, \tag{7}$$

其中 $X_j(j = 2,3,4),Y_{13},Y_{2j}(j = 2,3),Y_{3j}(j = 1,2,3)$ 均为 F 上的相应阶数的任意矩阵。

由引理及定理,我们可得解方程(1) 的具体步骤如下:

第一步:作矩阵 $H = \begin{pmatrix} A_{m\times n} & C_{m\times k} \\ E_n & E_k\end{pmatrix}$,并对 H 的前 m 行作一系列的初等行变换,对前 n 列作一系列的初等列变换化为

$$H \to H_1 = \left(\begin{array}{c:c} \begin{pmatrix} \Lambda & 0 \\ 0 & 0\end{pmatrix} & \begin{matrix} C_1 \\ C_2\end{matrix} \\ \hdashline Q & E_k\end{array}\right)$$

其中 Λ 为主对角元非零的上(下)三角矩阵,$\mathrm{rank}\Lambda = r_0$;继续对 H_1 的前 $r+1$ 到 m 行作初等行变换,对后 k 列作初等列变换(即对 C_2 作初等变换)化为

$$H_1 \to H_2 = \left(\begin{array}{c:c} \begin{pmatrix} \Lambda & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{array}{cc} C_{11} & C_{12} \\ \multicolumn{2}{c}{\begin{pmatrix} E_{r_1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}} \end{array} \\ \hdashline Q & Q_1 \end{array}\right)$$

继续对 H_2 的前 m 行和后 $m-r$ 列(即对 C_{12} 作初等变换,同时消去 C_{11})化为

$$H_2 \to \left(\begin{array}{c:cc} & 0 & \multirow{2}{*}{$\begin{pmatrix} E_{r_2} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$} \\ \begin{pmatrix} M_{r\times r} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & 0 & \\ & E_{r_1} & 0 \quad 0 \\ & 0 & 0 \quad 0 \\ \hdashline Q & \multicolumn{2}{c}{Q_0} \end{array}\right)$$

即得 $M_{r\times r}, Q, Q_0$(注意:在上述作法中若 H 中的 E_n 与 E_k 不同阶,应以零补上)。

第二步:对矩阵 $L = \begin{pmatrix} B & E_p \\ D & E_l \end{pmatrix}$,仿上作法,对其前 p 行作初等行变换,对其前 q 列作初等变换化为

$$L \to L_1 = \left(\begin{array}{cc:c} \multicolumn{2}{c:}{\begin{pmatrix} \Omega & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}} & V \\ \hdashline D_1 & D_2 & E_l \end{array}\right)$$

其中 Ω 为主对角元非零的上(下)三角阵,$\mathrm{rank}\Omega = s$。继续对 L_1 的后 l 行,$s+1$ 列到 q 列(及对 D_2)作初等变换化为

$$L_1 \to L_2 = \left(\begin{array}{c:c} \begin{pmatrix} \Omega & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & V \\ \hdashline \begin{pmatrix} D_{11} & E_{s_1} & 0 \\ D_{12} & 0 & 0 \end{pmatrix} & V_1 \end{array}\right)$$

继续对 L_2 的后 $l-s_1$ 行作初等行变换,前 s 列作初等列变换(即对 D_{12} 作初等变换,同时消去 D_{11})化为

$$L_2 \to \left(\begin{array}{c:c} \begin{pmatrix} N_{s\times s} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & V \\ \hdashline \begin{pmatrix} 0 & 0 & E_{s_1} & 0 \\ E_{s_2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & V_0 \end{array}\right)$$

则可得到 $N_{s\times s}, V, V_0$。

第三步:计算出 $M_{r\times r}, N_{s\times s}^{-1}$ 按定理中的通解表达式写出(1)式的通解公式。

2　实　例

在本段中,我们应用上述方法给定一个解方程的实例。

例　在实数域 R 上解矩阵方程 $AXB = CYD$,其中

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix},\ D = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}。$$

解:

$$H=\begin{pmatrix} A & C \\ E_2 & E_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

所以 $M=E_2, Q=E_2, Q_0=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, M^{-1}=E_2,$

$$L=\begin{pmatrix} B & E_r \\ D & E_l \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

所以 $$N=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, V=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, V_0=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix},$$

令 $$Q^{-1}XV^{-1}=(X_1 \quad X_2),\text{其中 } X_1=\begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{21} & X_{22} \end{pmatrix}, X_2=\begin{pmatrix} X_{13} \\ X_{23} \end{pmatrix},$$

$$Q_0^{-1}YV_0^{-1}=\begin{pmatrix} Y_{11} & Y_{12} & Y_{13} & Y_{14} \\ Y_{21} & Y_{22} & Y_{23} & Y_{24} \\ Y_{31} & Y_{32} & Y_{33} & Y_{34} \end{pmatrix}, PAQ=\begin{pmatrix} E_2 \\ O_{2\times 2} \end{pmatrix}, PCQ_0=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}。$$

$$VBU=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, V_0DU=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} O_{2\times 2} \\ E_2 \end{pmatrix}。$$

由(2)式

$$\begin{pmatrix} M_r \\ 0 \end{pmatrix} Q^{-1}XV^{-1}\begin{pmatrix} N_s \\ 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} E_2 \\ 0 \end{pmatrix}(X_1 \quad X_2)\begin{pmatrix} E_2 \\ 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} X_1 & X_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E_2 \\ 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} X_1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

其中：$X_1=\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix}$

$$(PCQ_0)(Q_0^{-1}YV_0^{-1})(V_0DU) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_{11} & y_{12} & y_{13} & y_{14} \\ y_{21} & y_{22} & y_{23} & y_{24} \\ y_{31} & y_{32} & y_{33} & y_{34} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} y_{31} & y_{32} & y_{33} & y_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ y_{11} & y_{12} & y_{13} & y_{14} \\ y_{21} & y_{22} & y_{23} & y_{24} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_{33} & y_{34} \\ 0 & 0 \\ y_{13} & y_{14} \\ y_{23} & y_{24} \end{pmatrix},$$

由(4)式

$$\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_{33} & y_{34} \\ 0 & 0 \\ y_{13} & y_{14} \\ y_{23} & y_{24} \end{pmatrix}。$$

从而 $x_{11} = y_{33}, x_{12} = y_{34}, x_{21} = x_{22} = 0, y_{13} = y_{14} = y_{23} = y_{24} = 0$

由(6)式,(7)式得

$$X = Q\left(M^{-1}\begin{pmatrix} y_{33} & y_{34} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} N^{-1} \quad x_2 \right) V = Q\begin{pmatrix} y_{33} & y_{34} & x_{13} \\ 0 & 0 & x_{23} \end{pmatrix} V = \begin{pmatrix} y_{33} & y_{34} & x_{13} \\ 0 & 0 & x_{23} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$Y = Q_0\begin{pmatrix} y_{11} & y_{12} & 0 & 0 \\ y_{21} & y_{22} & 0 & 0 \\ y_{31} & y_{32} & y_{33} & y_{34} \end{pmatrix} V_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_{11} & y_{12} & 0 & 0 \\ y_{21} & y_{22} & 0 & 0 \\ y_{31} & y_{32} & y_{33} & y_{34} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

其中,$x_{13}, x_{23}, y_{11}, y_{12}, y_{21}, y_{22}, y_{31}, y_{31}, y_{32}, y_{33}, y_{34}$ 是任意实数。

参考文献:

[1] 田永和.矩阵方程 $ABX = CYD$ 的通解[J].数学的实践与认识,1988,(1):61-63.
[2] 谢邦杰.抽象代数[M].上海:上海科技出版社,1982.
[3] 薛有才,王卿文.任意体上的矩阵方程 $ABX = CYD$[J].工程数学学报,1998,15(1):139-142.

On matrix equation $AXB = CYD$

ZHANG Shao-lin, XUE You-cai
(Dept. of Basic Courses, Zhejiang University of Science and Technology, Hangzhou 310012, China)

Abstract: In this paper, a practical solving method and an expression of general solution of a matrix equation $AXB = CYD$ are given by using matrix techniques and elementary operations on matrix.

Key words: matrix equation; elementary operation; domain