浙江科技学院学报,第 15 卷第 3 期,2003 年 9 月
Journal of Zhejiang University of Science and Technology
Vol.15 No.3, Sep. 2003

求解多项式重零点的并行迭代方法

章迪平
(浙江科技学院 基础部,浙江 杭州 310012)

摘　要:建立了一种至少 4 阶收敛的求解多项式重零点的并行迭代方法,分析并证明了相应的收敛性定理。

关键词:多项式;重零点;并行迭代;收敛阶
中图分类号:O241.7　　**文献标识码**:A　　**文章编号**:1671-8798(2003)03-0138-03

文献[1]提出了一种 3 阶收敛的同时求解多项式重零点的迭代方法,并分析了该法收敛的初始值条件。本文在文献[1]的基础上,结合 Newton 法给出了一种至少 4 阶收敛的求解多项式重零点的并行迭代方法,并对收敛性及收敛阶进行了分析和证明,其证明思想与处理方法类似于文献[2,3]。

1　方法的构造

考虑一个首项系数为 1 的多项式:

$$f(x) = \prod_{j=1}^{m}(x-\xi_j)^{\mu_j} \tag{1}$$

其具有实的或复的重零点 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_m$,重数分别为 $\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_m$,而 $\sum_{j=1}^{m}\mu_j = n(1\leqslant m\leqslant n)$。文献[1]给出了如下迭代方法:

$$x_i^{(k+1)} = x_i^{(k)} - \frac{\mu_i \dfrac{f(x_i^{(k)})}{f'(x_i^{(k)})}}{1-\dfrac{f(x_i^{(k)})}{f'(x_i^{(k)})}\sum\limits_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{m}\dfrac{\mu_j}{x_i^{(k)}-x_j^{(k)}}}, \tag{2}$$

式中,$i=1,2,\cdots,m$,$k=0,1,2,\cdots$。

若对(1)式用 Newton 法,则有:

$$x_i^{(k+1)} = x_i^{(k)} - \mu_i\frac{f(x_i^{(k)})}{f'(x_i^{(k)})}, \tag{3}$$

显然,只要初值 $x_i^{(0)}$ 选择适当,(3)式是平方收敛的[4]。

本文将 Newton 法与(2)式结合使用,建立如下迭代方法:

$$x_i^{(k+1)} = x_i^{(k)} + \frac{a_i^{(k)}}{1+a_i^{(k)}b_i^{(k)}}, \tag{4}$$

其中

$$a_i^{(k)} = -\frac{f(x_i^{(k)})}{f'(x_i^{(k)})}, \tag{5}$$

收稿日期:2003-04-16
作者简介:章迪平(1966—),男,浙江诸暨人,副教授,硕士,主要从事大学数学教学及计算数学研究。

$$b_i^{(k)} = \sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{m} \frac{\mu_j}{x_i^{(k)} - u_j^{(k)}}, \tag{6}$$

$$u_j^{(k)} = x_j^{(k)} + \mu_j a_j^{(k)}。 \tag{7}$$

为了便于讨论,先将(4)式改写成:

$$\varepsilon_i^{(k+1)} = \frac{y_i^{(k)}}{1 + y_i^{(k)}} \varepsilon_i^{(k)}。 \tag{8}$$

其中

$$\varepsilon_i^{(k)} = x_i^{(k)} - \xi_i, \tag{9}$$

$$y_i^{(k)} = \sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{m} \frac{\mu_j(x_i^{(k)} - \xi_i)(\xi_j - u_j^{(k)})}{\mu_i(x_i^{(k)} - \xi_j)(x_i^{(k)} - u_j^{(k)})}。 \tag{10}$$

式中,$i = 1,2,\cdots,m, k = 0,1,2,\cdots$。

2 两个引理

作为准备,我们先建立以下两个引理。

引理1 设 $u_j^{(k)}$ 由(7)式确定,则存在与 j,k 无关的常数 $\delta > 0, c > 0$,使当 $|x_j^{(0)} - \xi_j| \leqslant \delta$ 时,$|u_j^{(k)} - \xi_j| \leqslant c|x_j^{(k)} - \xi_j|^2, j = 1,2,\cdots,m, k = 0,1,2,\cdots$。

事实上,由于Newton法是平方收敛的,所以,对每个 j 存在与 k 无关的常数 $\delta_j > 0, c_j > 0$,当 $|x_j^{(0)} - \xi_j| \leqslant \delta_j$ 时,$|u_j^{(k)} - \xi_j| \leqslant c_j|x_j^{(k)} - \xi_j|^2$,只要取 $\delta = \max\limits_{1\leqslant j\leqslant m}\delta_j, c = \max\limits_{1\leqslant j\leqslant m} c_j$,即得引理1。若记:

$$d_i = \min_{\substack{1\leqslant j\leqslant m\\j\neq i}} |\xi_j - \xi_i|, \quad d = \min_{1\leqslant i\leqslant m} d_i, \mu = \min_{1\leqslant i\leqslant m}\mu_i, \tag{11}$$

则有:

引理2 存在自然数 r 满足:$\frac{d}{r} \leqslant \delta, r \geqslant cd, \mu(r-1)(r-2) > 2(n-\mu)$,这里 c、δ 为引理1中确定的常数。

3 收敛性定理及其证明

为了分析算法的收敛性,再引进以下记号:

$$\varepsilon^{(k)} = \max_{1\leqslant i\leqslant m} \varepsilon_i^{(k)} \qquad (k = 0,1,2,\cdots), \tag{12}$$

$$\lambda_n = \frac{(n-\mu)}{\mu(r-1)(r-2)}。 \tag{13}$$

定理1 当 $|\varepsilon_j^{(0)}| = |x_j^{(0)} - \xi_j| \leqslant \frac{d}{r}(j = 1,2,\cdots,m)$ 时,由(4)式产生的序列 $\{x_i^{(k)}\}_{k=0}^{\infty}$ 收敛到 ξ_i,且收敛阶至少为4。

证明 (i)先证明收敛性。当 $j \neq i$ 时,由引理1和引理2可得:

$$|x_i^{(0)} - \xi_j| \geqslant |\xi_i - \xi_j| - |x_i^{(0)} - \xi_i| \geqslant \frac{r-1}{r}d, \tag{14}$$

$$|u_j^{(0)} - \xi_j| \leqslant c|\varepsilon_j^{(0)}|^2 \leqslant c\left(\frac{d}{r}\right)^2 \leqslant \frac{d}{r}, \tag{15}$$

$$|u_j^{(0)} - x_i^{(0)}| \geqslant |\xi_i - \xi_j| - |x_i^{(0)} - \xi_i| - |u_j^{(0)} - \xi_j| \geqslant \frac{r-2}{r}d。 \tag{16}$$

于是,有:

$$|y_i^{(0)}| \leqslant \sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{m} \frac{\mu_j}{\mu_i} \frac{|\varepsilon_i^{(0)}| c |\varepsilon_j^{(0)}|^2}{\frac{r-1}{r}d\frac{r-2}{r}d} \leqslant \frac{c(n-\mu)\left(\frac{d}{r}\right)^3}{\mu\frac{(r-1)(r-2)}{r^2}d^2} \leqslant \lambda_n < \frac{1}{2}。 \tag{17}$$

现记
$$q_n = \frac{\lambda_n}{1-\lambda_n}, \tag{18}$$
则 $q_n < 1$,且有:
$$|\varepsilon_i^{(1)}| \leqslant \frac{|y_i^{(0)}|}{1-|y_i^{(0)}|}|\varepsilon_i^{(0)}| \leqslant \frac{\lambda_n}{1-\lambda_n}|\varepsilon_i^{(0)}| = q_n|\varepsilon_i^{(0)}|。 \tag{19}$$

若设 $|\varepsilon_j^{(k)}| \leqslant \frac{d}{r}(j=1,2,\cdots,m)$,则类似于(17) 和(19) 式可得:
$$|y_i^{(k)}| \leqslant \sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{m}\frac{\mu_j}{\mu_i}\frac{|\varepsilon_i^{(k)}|c|\varepsilon_j^{(k)}|^2}{\frac{r-1}{r}d\frac{r-2}{r}d} \leqslant \frac{c(n-\mu)\left(\frac{d}{r}\right)^3}{\mu\frac{(r-1)(r-2)}{r^2}d^2} \leqslant \lambda_n < \frac{1}{2}, \tag{20}$$
及
$$|\varepsilon_i^{(k+1)}| \leqslant \frac{|y_i^{(k)}|}{1-|y_i^{(k)}|}|\varepsilon_i^{(k)}| \leqslant \frac{\lambda_n}{1-\lambda_n}|\varepsilon_i^{(k)}| = q_n|\varepsilon_i^{(k)}|。 \tag{21}$$
因而,由数学归纳法知,当定理 1 的条件满足时,(20) 与(21) 式同时成立。

由(21) 式得到
$$|\varepsilon_i^{(k)}| \leqslant q_n^k|\varepsilon_i^{(0)}| \leqslant \left(\frac{d}{r}\right)q_n^k。 \tag{22}$$
因此,当 $k \to \infty$ 时,$\varepsilon_i^{(k)} \to 0$,即 $\lim\limits_{k\to\infty}x_i^{(k)} = \xi_i$。

(ii) 再分析收敛阶。由(13) 和(20) 式可得:
$$|y_i^{(k)}| \leqslant \frac{c(n-\mu)r^2}{\mu(r-1)(r-2)d^2}|\varepsilon^{(k)}|^3 = \frac{c\lambda_n r^2}{d^2}|\varepsilon^{(k)}|^3。 \tag{23}$$
记
$$c_1 = \frac{2c\lambda_n r^2}{d^2}, \tag{24}$$
则由 $|\varepsilon_i^{(k+1)}| \leqslant \frac{|y_i^{(k)}|}{1-|y_i^{(k)}|}|\varepsilon_i^{(k)}|$ 得:
$$|\varepsilon_i^{(k+1)}| \leqslant c_1|\varepsilon^{(k)}|^4, \tag{25}$$
故迭代法(4) 是至少 4 阶收敛的。

参考文献:

[1] 魏木生,高利新.一种同时求解多项式重根的迭代方法及其收敛性[J].华东师范大学学报,1998,(2):16 - 20.
[2] Ehrlich L W. Modified Newton method for polynomials[J]. Comm ACM,1967,(10):107 - 108.
[3] 章迪平.关于修正的并行 Halley 迭代法的收敛性证明[J].纺织高校基础科学学报,2001,(1):34 - 37.
[4] 曹志浩,张玉德,李瑞遐.矩阵计算和方程求根[M].北京:人民教育出版社,1979.

A parallel iterative method for finding multiple zeros of a polynomial

ZHANG Di-ping
(Dept. of Basic Courses, Zhejiang University of Science and Technology, Hangzhou 310012, China)

Abstract: This paper proposes a parallel iterative method for finding all multiple zeros of a polynomial, which is at least four order convergence. The convergence theorem is analyzed and proved in this paper.

Key words: polynomial; multiple zeros; parallel iterative; convergence order