浙江科技学院学报,第15卷第4期,2003年12月
Journal of Zhejiang University of Science and Technology
Vol.15 No.4, Dec. 2003

对称拓扑分子格中的可数紧性

艾为鸿
(浙江科技学院 理学系,浙江 杭州 310012)

摘　要: 在对称拓扑分子格中引入12种可数紧性的概念,着重指出了它们在极不连通的对称拓扑分子格中的内在联系。

关键词: 对称拓扑分子格;可数紧性;(强、弱)半开元;极不连通
中图分类号: O189.1;O153.1　　　**文献标识码**: A　　　**文章编号**: 1671-8798(2003)04-0199-03

紧性是一般拓扑学中最重要的性质之一。由于拓扑分子格以一般拓扑空间、Fuzzy拓扑空间、L-fuzzy拓扑空间为特例,以至于对后者所引入的许多性质都不能转化为拓扑分子格理论中相应的结果。对于紧性也一样,由王国俊先生提出的良紧性(以后由赵东升和彭育威分别独立地推广到L-fuzzy拓扑空间中)不适用于一般的拓扑分子格。正如王国俊先生在文献[1]的序中所指出的"紧性理论至今在拓扑分子格中仍是个空白"。本文拟研究对称拓扑分子格中的弱紧性,主要引入三类共12种可数紧性的概念,初步讨论了它们的一些性质。

为行文方便,先简述所需的有关术语与结果。本文未加定义而直接采用的概念与符号见文献[1~5]。

设 (L,η) 是一个拓扑分子格(以下简记为TML),若 L 上有逆序对合对应"$'$"存在,则称 L 是一个Fuzzy格,η 是 L 上的余拓扑。这时,$\delta=\eta'=\{P \mid P'\in\eta\}$ 中的元叫开元,η 中的元叫闭元。

设 (L,η) 是一个对称TML,$A\in L$,如果存在开元 B 使 $B\leqslant A\leqslant B^-$,则称 A 是半开元;若存在闭元 F 使 $F^0\leqslant A\leqslant F$,则称 A 是半闭元;若存在开元 B 使 $B\leqslant A\leqslant B^{-0}$,则称 A 是强半开元;若存在闭元 F 使 $F^{0-}\leqslant A\leqslant F$,则称 A 是强半闭元;若 $A\leqslant A^{-0-}$,则称 A 是弱半开元;若 $A\geqslant A^{0-0}$,则称 A 是弱半闭元;若 $A=A^{-0}$,则称 A 是正则开元;若 $A=A^{0-}$,则称 A 是正则闭元。记 $A_0=\vee\{G\in L \mid G\leqslant A$ 且 G 是 (L,η) 中的半开元$\}$ 和 $A_-=\wedge\{F\in L \mid F\geqslant A$ 且 F 是 (L,η) 中的半闭元$\}$,分别称 A_0 与 A_- 为 A 的半内部与半闭包。

引理1　在对称TML中,

$$\text{开元}\rightarrow\text{强半开元}\rightarrow\text{半开元}\rightarrow\text{弱半开元}$$

证明　设 (L,η) 是对称TML,若 A 为开元,则 $A=A^0$,从而 $A\leqslant A=A^0\leqslant A^{-0}$,故 A 是强半开元;若 A 是强半开元,则存在开元 B 使 $B\leqslant A\leqslant B^{-0}\leqslant B^-$,故 A 是半开元;若 A 为半开元,则存在开元 B 使 $B\leqslant A\leqslant B^-$,进而有 $B^-\leqslant A^-\leqslant B^{--}=B^-$,即 $A^-=B^-$。又因 $A\leqslant B^-=B^{0-}$,则 $A^-\leqslant B^{-0-}$,故 $A\leqslant A^-=B^{-0-}$,结合 $A^-=B^-$ 有 $A\leqslant A^{-0-}$,所以 A 是弱半开元。

设 (L,η) 是对称TML,若每个开元的闭包是开的,则称 (L,η) 为极不连通的[2]。

引理2[3]　设 (L,η) 是极不连通的对称TML,$A\in L$,则 A 是半开元当且仅当 A 是强半开元。

引理3[6]　设 (L,η) 是对称TML,$A\in L$,则

收稿日期: 2003-07-25
作者简介: 艾为鸿(1947—　),男,江西高安人,教授,主要从事基础数学的教学及格与拓扑的科研工作。

(1)$A^0 \leqslant A_0 \leqslant A \leqslant A_- \leqslant A^-$

(2) 半开元的闭包是正则闭元

引理4 设(L,η)是对称TML,$A \in L$,则

(1)$(A_-)^- = A^- = (A^-)_-$

(2)$A^{-0} \leqslant A_{-0}$

证明 (1)因$A \leqslant A_-$,则$A^- \leqslant (A_-)^-$;反之,$A_- \leqslant A^-$,则$(A_-)^- \leqslant (A^-)^- = A^-$,故$(A_-)^- = A^-$。又$A^- \leqslant (A^-)_-$,而$(A^-)_- \leqslant (A^-)^- = A^-$,故$A^- = (A^-)_-$。

(2) 任取(L,η)中的半闭元F,则存在闭元B使$B^0 \leqslant F \leqslant B$,从而$F^{-0} \leqslant B^{-0} = B^0 \leqslant F$。注意到$A_-$是$(L,\eta)$中的半闭元,则$(A_-)^{-0} \leqslant A_-$。由(1)知$(A_-)^- = A^-$,故$A^{-0} \leqslant A_-$。因$A^{-0}$是包含于$A_-$的一个半开元,由半内部的最大性就有$A^{-0} \leqslant A_{-0}$。

引理5 设(L,η)是极不连通的对称TML,则

(1) $A \in L$,A是正则开元当且仅当A是正则闭元

(2) 任取(L,η)中的(强)半开元A,$A_- = A^-$

证明 (1)$\forall A \in L$,若A是正则开元,显然A是开元,则$A^0 = A$。因(L,η)是极不连通的,由文献[2]中命题5知A是闭元,故$A^{0-} = A^- = A$,即A是正则闭元;反之若A是正则闭元,显然A是闭元,则$A^- = A$。因(L,η)是极不连通的,由文献[2]中命题5知A是开元,故$A^{-0} = A^0 = A$,即A是正则开元。

(2) 由引理2知在极不连通的对称TML中,半开元与强半开元等价,故只需证半开元的情形。$\forall A \in L$,若A是半开元,由引理3(1)有$A_- \leqslant A^-$。另一方面,由引理3(2)知A^-是正则闭元,从而由(1)的结论知A^-是正则开元,则$A^- = A^{-0}$。由引理4(2)有$A^{-0} \leqslant A_{-0}$,则$A^- \leqslant A_{-0} \leqslant A_-$,于是$A_- = A^-$得证。

定义1 设(L,η)是对称TML,

(1) 若(L,η)中最大元1的任意由可数开元组成的覆盖都有有限子覆盖,则称(L,η)为可数紧的。

(2) 若(L,η)中最大元1的任意由可数强半开元组成的覆盖都有有限子覆盖,则称(L,η)为强可数紧的。

(3) 若(L,η)中最大元1的任意由可数半开元组成的覆盖都有有限子覆盖,则称(L,η)为次超可数紧的。

(4) 若(L,η)中最大元1的任意由可数弱半开元组成的覆盖都有有限子覆盖,则称(L,η)超可数紧的。

定理1 在对称TML中,

$$\text{超可数紧性} \rightarrow \text{次超可数紧性} \rightarrow \text{强列数紧性} \rightarrow \text{可数紧性}$$

证明 由定义1及引理1可得。

定理2 设(L,η)是极不连通的对称TML,则(L,η)中的强可数紧性与次超可数紧性等价。

证明 由定义1及引理2可得。

定义2 设(L,η)是对称TML,

(1) 若(L,η)中最大元1的任意由可数开元组成的覆盖都有有限子族,它们的半闭包构成1的覆盖,则称(L,η)为Ⅱ可数紧的。

(2) 若(L,η)中最大元1的任意由可数强半开元组成的覆盖都有有限子族,它们的半闭包构成1的覆盖,则称(L,η)为Ⅱ强可数紧的。

(3) 若(L,η)中最大元1的任意由可数半开元组成的覆盖都有有限子族,它们的半闭包构成1的覆盖,则称(L,η)为Ⅱ次超可数紧的。

(4) 若(L,η)中最大元1的任意由可数弱半开元组成的覆盖都有限子族,它们的半闭包构成1的覆盖,则称(L,η)为Ⅱ超可数紧的。

定理3 在对称TML中,

$$\text{Ⅱ超可数紧性} \rightarrow \text{Ⅱ次超可数紧性} \rightarrow \text{Ⅱ强可数紧性} \rightarrow \text{Ⅱ可数紧性}$$

证明 由定义2及引理1可得。

定理4 在对称TML中,

可数紧性 → Ⅱ 可数紧性

强可数紧性 → Ⅱ 强可数紧性

次超可数紧性 → Ⅱ 次超可数紧性

超可数紧性 → Ⅱ 超可数紧性

证明　由引理 3(1) 对照定义 1 与定义 2 可得。

定理 5　设(L,η)是极不连通的对称 TML,则(L,η)中的 Ⅱ 强可数紧性与 Ⅱ 次超可数紧性等价。

证明　由定义 2 及引理 2 可得。

定义 3　设(L,η)是对称 TML,

(1) 若(L,η)中最大元 1 的任意由可数开元组成的覆盖都有有限子族，它们的闭包构成 1 的覆盖,则称(L,η)为 Ⅲ 可数紧的。

(2) 若(L,η)中最大元 1 的任意由可数强半元组成的覆盖都有有限子族,它们的闭包构成 1 的覆盖,则称(L,η)为 Ⅲ 强可数紧的。

(3) 若(L,η)中最大元 1 的任意由可数半开元组成的覆盖都有有限子族,它们的闭包构成 1 的覆盖,则称(L,η)为 Ⅲ 次超可数紧的。

(4) 若(L,η)中最大元 1 的任意由可数弱半开元组成的覆盖都有有限子族,它们的闭包构成 1 的覆盖,则称(L,η)为 Ⅲ 超可数紧的。

定理 6　在对称 TML 中,

Ⅲ 超可数紧性 → Ⅲ 次超可数紧 → Ⅲ 强可数紧性 → Ⅲ 可数紧性

证明　由定义 3 及引理 1 可得。

定理 7　在对称 TML 中,

Ⅱ 可数紧性 → Ⅲ 可数紧性

Ⅱ 强可数紧性 → Ⅲ 强可数紧性

Ⅱ 次超可数紧性 → Ⅲ 次超可数紧性

Ⅱ 超可数紧性 → Ⅲ 超可数紧性

证明　由引理 3(1) 对照定义 2 与定义 3 可得。

定理 8　设(L,η)是极不连通的对称 TML,则(L,η)中的 Ⅲ 强可数紧性与 Ⅲ 次超可数紧性等价。

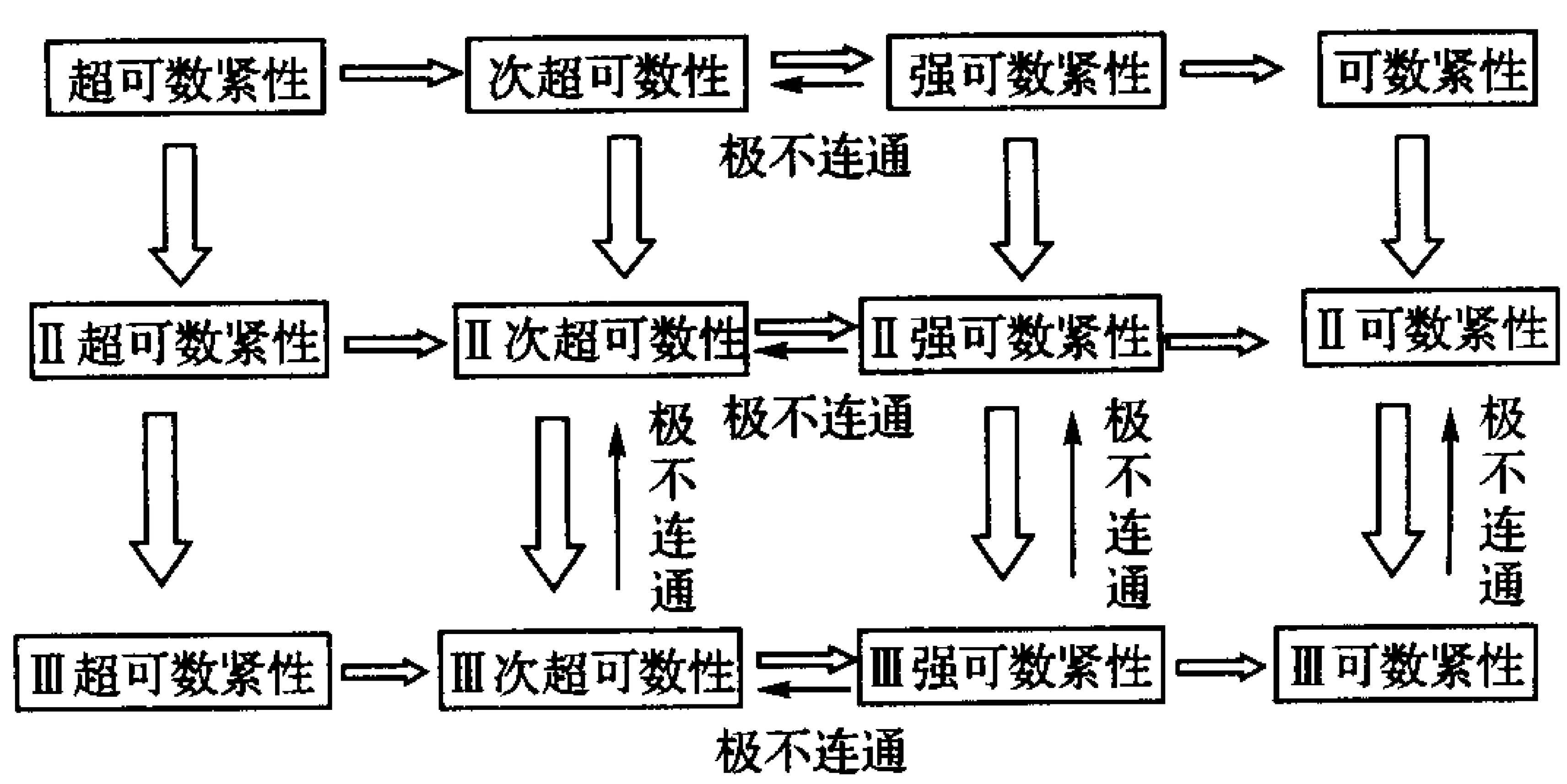
证明　由定义 3 及引理 2 可得。

定理 9　设(L,η)是极不连通的对称 TML,则 Ⅲ 可数紧性与 Ⅱ 可数紧性等价,Ⅲ 强可数紧性与 Ⅱ 可数紧性等价,Ⅲ 次超可数紧性与 Ⅱ 次超可数紧性等价。

证明　由引理 1 知开元必是半开元,再由引理 5(2) 并对照定义 2 与定义 3 容易推出,在极不连通的对称 TML 中,Ⅲ 可数紧性与 Ⅱ 可数紧性等价。

同样,由引理 5(2) 并对照定义 2 与定义 3 知,在极不连通的对称 TML 中,Ⅲ 强可数紧性与 Ⅱ 强可数紧性等价,Ⅲ 次超可数紧性与 Ⅱ 次超可数紧性等价。

综上所述,定义 1 至定义 3 中的 12 种可数紧性有如下蕴含关系式:



(下转第 218 页)