浙江科技学院学报,第 15 卷第 4 期,2003 年 12 月
Journal of Zhejiang University of Science and Technology
Vol.15 No.4, Dec. 2003

镜象气泡变形过程的模拟研究

汪尊伟[1],王兴莲[1],段文山[2]
(1.浙江科技学院 理学系,浙江 杭州 300012;2.西北师范大学 物理系,甘肃 兰州 730001)

摘　要:气泡在作轻微运动的平面附近变形,它的镜象气泡起的作用是让边界静止,流体源的作用可用来解释刚性板的影响。数值模拟的结果表明:如果板边界朝气泡运动,气泡变形较快;如果板边界作离开气泡的运动,气泡变形较缓慢。

关键词:气泡变形;刚性板;边界面
中图分类号:O354　　　**文献标识码**:A　　　**文章编号**:1671-8798(2003)04-0202-04

在一平面边界附近气泡的成长及变形问题,已出现了一些理论的研究、数值的计算及实验研究的结果[1,2]。当平面为刚体壁时,气泡变形表现出射流直接朝着壁的特性;当平面界面为一自由表面时,将形成反向射流。另一种可以引起射流的情况是,附近处于有限气泡云中的气泡在高压下的运动。在一些数值计算中,这样的泡云的外部边缘的气泡将呈现直接朝泡云中央射流的趋向。在固体壁附近的气泡变形中,许多实验观察到射流(或称作微射流)的不同,取决于泡中心与壁的最初距离。如气泡最初为球面且接近壁,射流的发展进程是典型的,可用一系列的图来表示[3]。静流体中的射流已有大量的理论分析与实验研究。在固体界面附近最初为球面的气泡变形时的畸变已有数值计算结果,其剖面的计算结果与实验观测结果符合[4]。在固体或弹性表面的气泡的变形研究中,已有一系列的解析方法[5]。我们使用 Predictor 及 Corrector 方法进行数值模拟计算,以期数值化地描述任意时间的泡的状态。对于液体、理想气体、范德瓦耳斯气体及其他气体模型的气泡,可以通过解 Navier-Stokes 方程研究其变形过程。

1　运动方程

为方便计,定义附加球面坐标 (r,θ),其原点在气泡的中央。连续性方程为:

$$\frac{1}{c^2}\left[\left(\frac{\partial h}{\partial t}+\frac{\partial \phi}{\partial r}\cdot\frac{\partial h}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\cdot\frac{\partial \phi}{\partial \theta}\cdot\frac{\partial h}{\partial \theta}\right]+\frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2}+\frac{2}{r}\cdot\frac{\partial \phi}{\partial r}+\frac{1}{r^2\cdot\sin\theta}\cdot\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta\cdot\frac{\partial \phi}{\partial r}\right)=0 \tag{1}$$

动力学方程:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t}+\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial \phi}{\partial r}\right)^2+\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial \phi}{\partial t}\right)^2\right]+h=0 \tag{2}$$

其中 ϕ 为速度势。声速及液体的焓定义为:

$$c^2=\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}\rho} \tag{3}$$

$$h=\int_{p_0}^{p}\frac{\mathrm{d}p}{\rho} \tag{4}$$

流体压力由 Tait 方程给出:

收稿日期:2003-05-05
作者简介:汪尊伟(1954—　),男,安徽歙县人,教授,主要从事计算物理学的研究。

$$\frac{p+B}{p_0+B}=\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^n \tag{5}$$

对于水,其值 $B=3\,049.13\mathrm{ba}$, $n=7.15$ 能极好地符合实验上的压强与密度关系(直到 $10^5\mathrm{ba}$), p_0 与 ρ_0 代表未受扰动的液体压强及密度。

让 R_0 及 U 代表典型泡半径及径向速度,并引入无量纲量,由 * 号来表示。进行一系列推导后我们得到:

零阶方程:

$$\frac{\partial^2\varphi_0}{\partial r^{*2}}+\frac{2}{r^*}\cdot\frac{\partial\varphi_0}{\partial r^*}+\frac{1}{r^{*2}\sin\theta}\cdot\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\varphi_0}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{c_*^2}\cdot\frac{\partial H_0}{\partial t_*}=0 \tag{6}$$

$$\frac{\partial\varphi_0}{\partial t_*}+H_0=0 \tag{7}$$

一阶方程:

$$\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial r^{*2}}+\frac{2}{r^*}\cdot\frac{\partial\varphi_1}{\partial r^*}+\frac{1}{r^{*2}\sin\theta}\cdot\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\varphi_1}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{c_*^2}\cdot\frac{\partial H_1}{\partial t_*}=0 \tag{8}$$

$$\frac{\partial\varphi_1}{\partial t_*}+H_1=0 \tag{9}$$

2　解析解

假设气泡中心初始处于球坐标原点,初始半径为 R_0,初始泡中心到固体边界平面距离为 $r_0/2$,考虑到通常至固体平面的液体速度满足 $-r_0/2=r_*\cos\theta$ 时为零,用摄动方法,对近场的一级近似结果为:

$$\phi_0=-f_0(t_*)\left(\frac{1}{r_*}+\frac{1}{\sqrt{r_*^2+r_0^2+2r_*r_0\cos\theta}}\right)+g_0(t_*) \tag{10}$$

这里,似乎有一个象泡存在于边界的反面。(10) 式的第一项由真实的泡贡献,第二项由象泡贡献。基于这一假定,液体的焓由下式给出:

$$h_0=f_0'(t_*)\left[\frac{1}{r_*}+\frac{1}{\sqrt{r_*^2+r_0^2+2r_*r_0\cos\theta}}\right]-g_0'(t_*)-$$
$$\frac{1}{2}\left[\frac{1}{r_*^4}+\frac{1}{(r_*^2+r_0^2+2r_*r_0\cos\theta)^2}+\frac{2(r_*+r_0\cos\theta)}{r_*^2(r_*^2+r_0^2+2r_*r_0\cos\theta)^{\frac{3}{2}}}\right]f_0^2(t_*) \tag{11}$$

我们可以得到方程(6) 及(7) 的解:

$$\varphi_0=\frac{F_0(t_*-r^*)+G_0(t_*+r^*)}{r^*}+\frac{F_0(t_*-r_1^*)+G_0(t_*+r_1^*)}{r_1^*}+\alpha_0 \tag{12}$$

$$H_0=-\frac{F_0'(t_*-r^*)+G_0'(t_*+r^*)}{r^*}-\frac{F_0'(t_*-r_1^*)+G_0'(t_*+r_1^*)}{r_1^*} \tag{13}$$

其中, $r_1^*=\sqrt{r_*^2+r_0^2+2r^*r_0\cos\theta}$, $\alpha_0=$ 常数, $c_*\approx 1$ 。

对于较小的 r^*,即在内部区域外边缘,

$$\varphi_0=\frac{F_0(t_*)+G_0(t_*)}{r^*}+G_0'-F_0'+\frac{F_0(t_*)+G_0(t_*)}{r_1^*}+G_0'-F_0'+\alpha_0 \tag{14}$$

或者

$$\varphi_0=\left(\frac{1}{r_1^*}+\frac{1}{r^*}\right)[F_0(t_*)+G_0(t_*)]+2[G_0'(t_*)-F_0'(t_*)]+\alpha_0 \tag{15}$$

对于较大的 r_*,表示外部区域的内边界:

$$\phi_0=g_0(t_*) \tag{16}$$

两个解在这个区域是一致有效的:

$$F_0=-G_0 \tag{17}$$

$$g_0 = 4G_0' + \alpha_0 \tag{18}$$

故对于势的零阶终解为：

$$\phi_0 = -f_0(t_*)\left(\frac{1}{r_*} + \frac{1}{r_{1*}}\right) + 4G_0'(t_*) + \alpha_0 \tag{19}$$

$$\varphi_0 = \frac{1}{r^*}[G_0(t_* + r^*) - G_0(t_* - r^*)] + \frac{1}{r_1^*}[G_0(t_* + r_1^*) - G_0(t_* - r_1^*)] + \alpha_0 \tag{20}$$

其中，$r_1^* = \sqrt{r^{*2} + r_0^2 + 2r^* r_0\cos\theta}$，$r_{1*} = \sqrt{r_*^2 + r_0^2 + 2r_* r_0\cos\theta}$ 。

在液体与气体分界面处，

$$r_* = R_*(t_*, \theta)$$

$$h_0 = h_B \approx \frac{p_B - p_0}{\rho_0} \tag{21}$$

其中，h_B 及 p_B 分别是焓及液体在界面处的压强。

故得到界面处的方程：

$$h_B = f_0'(t_*)\left(\frac{1}{R_*} + \frac{1}{r_{**}}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{R_*^4} + \frac{1}{r_{**}^4} + 2\cdot\frac{R_* + r_0\cos\theta}{R_*^2 r_{**}^3}\right)f_0^2(t_*) - 4G_0''(t_*) \tag{22}$$

其中，$r_{**} = \sqrt{R_*^2 + r_0^2 + 2R_* r_0\cos\theta}$，在界面处的运动学条件为：

$$\frac{\partial\phi_0}{\partial r_*} = \frac{\partial R_*}{\partial t_*} + \frac{1}{R_*^2}\cdot\frac{\partial R_*}{\partial\theta}\cdot\frac{\partial\phi_0}{\partial\theta} \tag{23}$$

因此，可解出：

$$f_0(t_*) = \frac{\partial R_*}{\partial t_*}\cdot\left(\frac{1}{R_*^2} + \frac{R_* + r_0\cos\theta}{r_{**}^3} + \frac{r_0\sin\theta}{R_* r_{**}^3}\cdot\frac{\partial R_*}{\partial\theta}\right)^{-1} \tag{24}$$

f_0 既是时间 t 的函数，也是角量 θ 的函数。但根据数值计算$\frac{\partial f_0}{\partial t} \sim 10^8\frac{\partial f_0}{\partial\theta}$，因此，可假设 f_0 仅是时间的函数，最后，对不可压缩液体 $R_*(t_*, \theta)$ 可由方程(22)、(24) 定出。

内部一阶方程(12)、(13) 关于 ϕ_1 的解与零阶解形式上相同：

$$\phi_1 = -f_1(t_*)\left(\frac{1}{r_*} + \frac{1}{r_{1*}}\right) + g_1(t_*) \tag{25}$$

但现在运动学边界条件需要 $f_1(t_*) = 0$，故

$$\phi_1 = g_1(t_*) \tag{26}$$

$$h_1 = -g_1'(t_*) \tag{27}$$

对应的外部区域方程的解形式上也与零阶的相同：

$$\varphi_1 = F_1(t_* - r^*)\frac{1}{r^*} + F_1(t_* - r_1^*)\frac{1}{r_1^*} \tag{28}$$

$$H_1 = -F_1'(t_* - r^*)\frac{1}{r^*} - F_1'(t_* - r_1^*)\frac{1}{r_1^*} \tag{29}$$

这里假设对于 φ_1 及 H_1，不存在入射波但仅有出射波。

选择恰当的匹配条件(对于 $r_* \to \infty, r^* \to 0$) 可以得到：

$$\phi_1 = 2f_0' \tag{30}$$

$$\varphi_1 = -\frac{f_0(t_* - r^*)}{r^*} - \frac{f_0(t_* - r_1^*)}{r_1^*} \tag{31}$$

二级近似的速度势：

$$\phi_* = -f_0(t_*)\left(\frac{1}{r_*} + \frac{1}{r_{1*}}\right) + 4G_0'(t_*) + \alpha_0 + 2\in f_0'(t_*) \tag{32}$$

以及近场区域液体的焓:

$$h_* = f_0'(t_*)\left(\frac{1}{r_*} + \frac{1}{r_{1*}}\right) - \frac{1}{2}f_0^2\left(\frac{1}{r_*^4} + \frac{1}{r_{1*}^4} + 2 \cdot \frac{r_* + r_0\cos\theta}{r_*^2 r_{1*}^3}\right) - 2 \in f_0'' - 4G_0'' \tag{33}$$

3　结　论

尽管大多数气泡变形状态的热效应可忽略不计,然而当气泡容量在注入液体的惯性作用下被高度压缩时,在变形的最后阶段,却起着很重要的作用。在球面泡变形期间,泡内气体的压力与温度可以预知度是非常高的。因作用时间很短(微秒数量级),可假设泡内的不凝固气体表现为绝热气体(这应该是合理的),故我们可得知在液体与气体之间无热传导发生。

通过使用 Predictor 及 Corrector 方法,可以数值化地得到任意时间的泡的状态。

在计算气泡的变形状态时,选取的时间分别为 $t = 10^{-5}$ s, $t = 6 \times 10^{-5}$ s, $t = 9 \times 10^{-5}$ s, $t = 11 \times 10^{-5}$ s, $t = 11.22 \times 10^{-5}$ s, $t = 11.24 \times 10^{-5}$s,泡的初始半径为 1 cm,泡中心离边界的初始距离为 1.5 cm,板半径长度为 5 cm,幅值 A 为 0.005;我们选择板半径(极坐标)$\rho_0 = 5$ cm,幅值为 $A = 0.005$, -0.005, $A = 0.001$, -0.001, 0,再选择 $\rho_0 = 20$ cm,幅值为 $A = 0.001$, -0.001, 0。

从这些计算结果中可以得出结论:若刚性边界朝气泡运动,气泡变形较快;若刚体边界离开气泡而去,气泡变形较慢。若板运动幅值较大,则板运动的影响将会很重要,其间,如果板长度较大,则板运动的影响就更重要。

参考文献:

[1] Blake J R, Gibson D C. Cavitation bubbles near boundaries[J]. Ann Rev Fluid Mech, 1987, (19): 99 - 124.

[2] Plesset M S, Chapman R B. Collapse of an initially sphereical vapour cavity in the neighbourhood of a solid boundary[J]. J Fluid Mech, 1970, (47): 283 - 290.

[3] Blake J R, Gibson D C. Growth and collapse of a vapour cavity near a freesurface[J]. J Fluid Mech, 1981, (111): 123 - 140.

[4] Chahine G L, Duraiswami R. Dynamical interaction in a multibubble cloud[J]. ASME J Fluid Eng, 1992, (114): 680 - 686.

[5] Tomita Y, Shima A. High-speed photographic observations of laser induced cavitation bubbles in water[J]. Acustica, 1990, 71(3): 161 - 171.

Simulative investigation of a mirror bubble collapse

WANG Zun-wei[1], WANG Xing-lian[1], DUAN Wen-shan[2]

(1. Dept. of Science, Zhejiang University of Science and Technology, Hangzhou 310012, China;

2. Dept. of Physics, Northwest Normal University, Lanzhou 730070, China)

Abstract: A bubble collapse near a slight movement of the plane. The mirror bubble lets boundary at rest, the fluid source shows the effect of the plate. The numerical simulative results have shown that if the boundary moves towards the bubble, the bubble collapse more quickly; if the plate boundary moves away from the bubble , the bubble collapse slower.

Key words: bubble collapse; rigid plate; boundary plane