浙江科技学院学报,第16卷第1期,2004年3月
Journal of Zhejiang University of Science and Technology
Vol. 16 No. 1, Mar. 2004

杨忠道定理在算子开集理论下的推广

钱有华,陈胜敏
(浙江师范大学 数理学院,浙江 金华 321004)

摘　要:将开集理论中的杨忠道定理推广到算子开集理论中,建立了算子杨忠道定理,并讨论了它的应用。

关键词:算子邻域;算子聚点;算子导集;算子闭包
中图分类号:O189.11　　　**文献标识码**:A　　　**文章编号**:1671-8798(2004)01-0001-03

杨忠道定理是一般拓扑学中的一个著名定理,近年来,许多学者对它作了不同形式的推广。如文献[1]将它推广到了半开集理论下的S-杨忠道定理;文献[2]将它推广到了Fuzzy拓扑空间;文献[3]引进一些算子来刻画半开集、准开集和α-集等广义开集;笔者在文献[4]中引进算子开集的概念,讨论了算子紧空间。本文在文献[4]的基础上进一步引进算子导集、算子邻域等概念,建立了算子开集理论下的杨忠道定理,即T为关于算子邻域是封闭的广义开集算子,则拓扑空间X每一子集的算子导集为算子闭集当且仅当每一独点集的算子导集为算子闭集。

1　预备知识

设$(X;\Gamma)$为拓扑空间,A为X的子集,A的闭包、导集和余集分别记为$c(A)$、$d(A)$和A^C。T为2^X到2^X的一个算子,记$\Omega=\{A\in 2^X|A=TA\}$。若$\Gamma\subseteq\Omega$,则称Ω为X的一个强算子开集族,Ω中的元素称为强算子开集;若$\varnothing\neq\Omega\subseteq\Gamma$,则称$\Omega$为$X$的一个弱算子开集族,$\Omega$中的元素称为弱算子开集。强算子开集和弱算子开集统称算子开集,或称T开集。若A^C为算子开集,则称A为算子闭集。算子T称为广义开集算子。

定义1　设$x\in U\subseteq X$,若存在$V\in\Omega$,使得$x\in V\subseteq U$,则称U为x的算子邻域。

定义2　设$A\subseteq X$,若x的任意算子邻域U中都有A中异于x的点,即$U\cap(A-\{x\})\neq\varnothing$,则称$x$为$A$的算子聚点。

定义3　由A的所有算子聚点组成的集合称为A的算子导集,记作$Td(A)$。

定义4　A与$Td(A)$的并集称为A的算子闭包,记作$Tc(A)$,即$Tc(A)=A\cup Td(A)$。

定义5　设$(X;\Gamma)$为拓扑空间,任意$x\in X$,设U、V是由T导出的x的任意两个算子邻域,若任意$y\in U\cap V$,$U\cap V$为y的算子邻域,则称T关于算子邻域是封闭的广义开集算子。

2　主要结果

为将开集理论中的杨忠道定理推广到算子开集理论,先给出一些命题。

命题1　A是X的算子闭集当且仅当$Td(A)\subseteq A$。

收稿日期:2003-11-07
基金项目:浙江省重点学科经费资助项目(浙教计2002266)
作者简介:钱有华(1978—　),男,浙江建德人,硕士研究生,主要从事拓扑学的学习和研究。

证 (必要性)设 x 不属于 A，则 $x \in X - A$，因 $X - A$ 为算子开集，而 $(X - A) \cap (A - \{x\}) = \varnothing$，故 x 不属于 $Td(A)$，于是 $Td(A) \subseteq A$。

(充分性)设 $x \in X - A$，则 x 不属于 A，又 $Td(A) \subseteq A$。于是 x 不属于 $Td(A)$，根据算子聚点的定义得知，存在 x 的算子邻域 U，使得 $U \cap (A - \{x\}) = \varnothing$。由于 U 为 x 的算子邻域，故存在 $V_x \in \Omega$，使得 $x \in V_x \subseteq U \subseteq X - A$，于是 $X - A = \bigcup_{x \in X - A} V_x$。显然算子开集的并集仍为算子开集，故 A 是 X 的算子闭集。

命题2 A 是 X 的算子闭集当且仅当 $A = Tc(A)$。

证 (必要性)由条件和命题1知 $Td(A) \subseteq A$，故 $Tc(A) = A \cup Td(A) = A$。

(充分性)因 $Tc(A) = A \cup Td(A) = A$，故 $Td(A) \subseteq A$，由命题1知 A 是 X 的算子闭集。

设 T 为关于算子邻域是封闭的广义开集算子，仿照点集拓扑中的证明可得。

命题3 $Tc(Tc(A)) = Tc(A)$。

下面给出本文的主要结果。

定理1 (算子杨忠道定理)设 T 为关于算子邻域是封闭的广义开集算子，则拓扑空间 X 每一子集的算子导集为算子闭集当且仅当每一独点集的算子导集为算子闭集。

证 必要性显然，下证充分性：

设 $(X;\Gamma)$ 为拓扑空间，$A \subseteq X$，任意 $x \in Tc(Td(A))$，只需证 $x \in Td(A)$。因 $Tc(Td(A)) \subseteq Tc(Tc(A)) = Tc(A) = A \cup Td(A)$，故 $x \in A \cup Td(A)$。若 x 不属于 A，则 $x \in Td(A)$。下设 $x \in A$，证 $x \in Td(A)$。事实上，因 $Td(\{x\})$ 为算子闭集，设 $G = X - Td(\{x\})$，则 G 为 x 的算子开集。设 U 为 x 的任意算子邻域，定义 $V = U \cap G$，因 T 为关于算子邻域是封闭的广义开集算子，故 V 为 x 的算子邻域。又 $x \in Tc(Td(A))$，故 $V \cap Td(A) \neq \varnothing$。取 $y \in V \cap Td(A)$，则 $y \in V \subseteq U$ 且 $y \in Td(A)$，于是 $U \cap (A - \{y\}) \neq \varnothing$。

分两种情况：

(1) 若 $y = x$，则已有 $x = y \in Td(A)$。

(2) 若 $y \neq x$，令 $W = X - Tc(\{x\})$，由于 $y \in V \subseteq G = X - Td(\{x\})$。故 y 不属于 $Tc(\{x\})$。于是 W 为 y 的算子邻域，且 $(U \cap W) \cap (A - \{y\}) \neq \varnothing$。又 x 不属于 W，故 $U \cap (A - \{x\}) \supseteq (U \cap W) \cap (A - \{x\}) = (U \cap W) \cap A \supseteq (U \cap W) \cap (A - \{y\}) \neq \varnothing$。从而 $x \in Td(A)$，所以 $Tc(Td(A)) \subseteq Td(A)$，故 $Td(A)$ 为算子闭集。

命题得证。

令 T 为内部算子，则

推论1[5] (杨忠道定理)拓扑空间每一子集的导集为闭集当且仅当每一独点集的导集为闭集。

令 $T = \mathrm{sin}t$，则

推论2[1] (S-杨忠道定理)拓扑空间每一子集的半导集为半闭集当且仅当每一独点集的半导集为半闭集。

3 定理的应用

设 T 为关于算子邻域是封闭的广义开集算子，笔者给出定理1的一些应用。

定义6 设 X 为拓扑空间，若 $x, y \in X$，且 $x \neq y$，存在 X 的算子开集 Ax, Ay，使 $x \in A_x, y \in A_y$，但 x 不属于 A_y，y 不属于 A_x，则称 X 为算子 T_1 空间。

定理2 X 是算子 T_1 空间当且仅当它的每一个独点集都是算子闭集。

证 若 $x \in X$，由于 X 为算子 T_1 空间，对任意 $y \in X, y \neq x$，y 有算子邻域 A_y，使得 x 不属于 A_y，即 $A_y \cap \{x\} = \varnothing$，即 y 不属于 $Tc(\{x\})$。从而 $Tc(\{x\}) = \{x\}$。这表明独点集 $\{x\}$ 为算子闭集。

若 $x, y \in X$，且 $x \neq y$，由 X 的每一独点集都是算子闭集知 $\{x\}$ 和 $\{y\}$ 都是算子闭集，从而 $X - \{x\}$，$X - \{y\}$ 分别为 x 和 y 的算子邻域，前者不含 y，后者不含 x。这就证明了 X 为算子 T_1 空间。

定理3 X 是算子 T_1 空间当且仅当 X 的任一子集的算子导集都是算子闭集。

证 X 是算子 T_1 空间当且仅当任意 $x \in X$，独点集 $\{x\}$ 是算子闭集，故 $Tc(\{x\}) = Td(\{x\}) \cup \{x\} =$

$\{x\}$，即 $Td(\{x\})=\varnothing$ 或 $Td(\{x\})=\{x\}$。故 X 的任一独点集的算子导集为算子闭集。

由定理 1 知，X 是算子 T_1 空间当且仅当 X 的任一子集的算子导集都是算子闭集。

参考文献：

[1] 龙　毅，向仍淼，杨稚恒．关于杨忠道定理的推广[J]．吉首大学学报(自然科学版)，1997，18(2)：27－28.

[2] 邵益新，王丽霞．杨忠道定理的 Fuzzy 推广[J]．南京师范大学学报(自然科学版)，2000，23(4)：27－30.

[3] Marian Przemski. On the Decomposition of the Continuity[J]. Journal of Formalized Mathematics，2002，(6)：1－5.

[4] 钱有华．关于算子紧空间[J]．浙江师范大学学报(自然科学版)，2003，26(4)：333－336.

[5] 熊金城．点集拓扑讲义[M]．第二版．北京：高等教育出版社，1998.

Generalization of C. T. Yang's theorem in operator open set theory

QIAN You-hua，CHEN Sheng-min

(College of Mathematics and Physics，Zhejiang Normal University，Jinhua 321004，China)

Abstract：In this paper，the authors generalized the C. T. Yang's theorem from open set theory to operator open set theory，constructed the operator C. T. Yang's theorem，and discussed its applications on new area.

Key words：operator neighborhood；operator accumulation point；operator derivable set；operator closure