浙江科技学院学报,第 16 卷第 2 期,2004 年 6 月
Journal of Zhejiang University of Science and Technology
Vol. 16 No. 2, June 2004

两种群相互竞争的具有非线性传染率的 SIS 模型

朱婉珍,许梅生
(浙江科技学院 理学系,浙江 杭州 310023)

摘　要:研究了两种群相互竞争的具有非线性传染率的自治类型的 SIS 传染病模型,得到了一些平衡点稳定与否的阈值条件。揭示了当两种群共存但无疾病交叉传染时,在一定条件下疾病就会消亡的规律。

关键词:传染病模型;疾病交叉传染;区域渐进稳定性
中图分类号:O175　　**文献标识码**:A　　**文章编号**:1671-8798(2004)02-0075-05

传染病是严重危害人类生命健康的感染性疾病。历史上传染病曾给人类带来很大的灾难,1346－1350 年黑死病曾引起欧洲三分之一的人口死亡。近几年来,一些新出现的传染病来势凶猛,如艾滋病(AIDS)、疯牛病和最近新出现的非典型肺炎(SARS)等。世界卫生组织预测,到 2010 年,艾滋病将会导致非洲撒哈拉沙漠地区近一半的人口死亡。据联合国有关部门透露,目前感染艾滋病毒的亚洲人已至少上升到 720 万人。以上这些数据表明,对传染病的发病机制、传染途径和流行规律的研究,从而提出有效的预防与治疗方案,是一项十分重要和有意义的工作。

通过建立数学模型对传染病进行定性与定量的研究是一种重要的方法,并且现今已经取得了很多好的结果[1~4],文献[4]主要研究了双线性传染率的两种群相互竞争的自治类型的 SIS 传染病模型。但鉴于实际上易感者发病的多少不仅与染病者数量的多少有关,更与病菌本身的传染性强弱有关,因此,更合理的传染率应是非线性的。本文主要研究传染率为非线性的两种群相互竞争的自治类型的 SIS 传染病模型,即在生态学意义上,两种群为竞争类型,在疾病的传染机理上,两种群为 SIS 类型且传染率为非线性函数。一种疾病在两种群内部同时存在,而且两种群间存在交叉感染现象。

观察系统(Ⅰ):

$$
\begin{cases}
\dot{N}_1 = \left[r_1\left(1-\dfrac{N_1}{K_1}\right) - mN_2\right]N_1 \\
\dot{S}_1 = \left(b_1 - \dfrac{a_1 r_1 N_1}{K_1}\right)N_1 - \left[d_1 + (1-a_1)\dfrac{r_1N_1}{K_1}\right]S_1 - mN_2S_1 - S_1(\beta_{11}I_1^{\alpha} + \beta_{12}I_2^{\delta}) + \gamma_1 I_1 \\
\dot{I}_1 = S_1(\beta_{11}I_1^{\alpha} + \beta_{12}I_2^{\delta}) - \gamma_1 I_1 - \left[d_1 + (1-a_1)\dfrac{r_1N_1}{K_1}\right]I_1 - mN_2I_1 \\
\dot{N}_2 = \left[r_2(1-\dfrac{N_2}{K_2}) - nN_1\right]N_2 \\
\dot{S}_2 = \left(b_2 - \dfrac{a_2 r_2 N_2}{K_2}\right)N_2 - \left[d_2 + (1-a_2)\dfrac{r_2N_2}{K_2}\right]S_2 - nN_1S_2 - S_2(\beta_{21}I_1^{\delta} + \beta_{22}I_2^{\alpha}) + \gamma_2 I_2 \\
\dot{I}_2 = S_2(\beta_{21}I_1^{\delta} + \beta_{22}I_2^{\alpha}) - \gamma_2 I_2 - \left[d_2 + (1-a_2)\dfrac{r_2N_2}{K_2}\right]I_2 - nN_1I_2 \\
N_i = S_i + I_i, r_i = b_i - d_i > 0, 0 < a_i < 1 \\
\text{其中 } i = 1,2
\end{cases}
$$

收稿日期:2004-02-24

作者简介:朱婉珍(1964—　),女,浙江温岭人,高级讲师,主要从事微分方程应用的研究。

其中：N_i 为种群 i 的规模总量；S_i，I_i 分别为种群 i 的易感者和染病者的数量；r_i 为种群 i 的内禀增长率；K_i 为种群 i 的环境容纳量；m，n 为两种群的种间相互作用系数；$b_i - \frac{a_i r_i N_i}{K_i}$，$d_i + (1-a_i)\frac{r_i N_i}{K_i}$ 分别为种群 i 的出生率和自然死亡率；β_{ii} 为种群 i 的种内疾病接触传染率；$\beta_{ij}(i \neq j)$ 为两种群的种间疾病交叉传染率；γ_i 为种群 i 的疾病恢复率，并且假设 r_i，K_i，m，n，b_i，a_i，d_i，β_{ij}，γ_i，α，δ 均为正常数。

不失一般性，本文假设 $\alpha = 2$，$\delta = 1$，从而系统（Ⅰ）可化为系统（Ⅱ）：

$$\begin{cases} \dot{I}_1 = (N_1 - I_1)(\beta_{11} I_1^2 + \beta_{12} I_2) - \gamma_1 I_1 - \left[d_1 + (1-a_1)\frac{r_1 N_1}{K_1}\right] I_1 - m N_2 I_1 \\ \dot{N}_1 = \left[r_1 (1 - \frac{N_1}{K_1}) - m N_2\right] N_1 \\ \dot{I}_2 = (N_2 - I_2)(\beta_{21} I_1 + \beta_{22} I_2^2) - \gamma_2 I_2 - \left[d_2 + (1-a_2)\frac{r_2 N_2}{K_2}\right] I_2 - n N_1 I_2 \\ \dot{N}_2 = \left[r_2 (1 - \frac{N_2}{K_2}) - n N_1\right] N_2 \\ N_i \geqslant I_i \geqslant 0, r_i = b_i - d_i > 0, 0 < a_i < 1 \\ \text{其中 } i = 1,2 \end{cases}$$

易得，集合 $\Omega_0 = \{(I_1, N_1, I_2, N_2)^T | 0 \leqslant I_i \leqslant N_i \leqslant K_i, i = 1,2\}$ 为系统（Ⅱ）的正向不变集。现对系统（Ⅱ）进行讨论。

1 引 理

为讨论方便，记 $\psi = \frac{r_1}{r_2}$，$\Psi_1 = \frac{r_1}{nK_1}$，$\Psi_2 = \frac{mK_2}{r_2}$。同文献[4]，有如下引理 1 成立。

引理 1 由系统（Ⅱ）中的 N_1，N_2 构成的二维竞争系统（Ⅲ）：

$$\begin{cases} \dot{N}_1 = \left[r_1 (1 - \frac{N_1}{K_1}) - m N_2\right] N_1 \\ \dot{N}_2 = \left[r_2 (1 - \frac{N_2}{K_2}) - n N_1\right] N_2 \end{cases}$$

有下列结论成立：

(1) 当 $\Psi_2 < \psi < \Psi_1$ 时，系统（Ⅲ）存在 4 个平衡点 O，P，Q 和 M，其中 M 为正平衡点，其在区域 $\Omega = \{(N_1, N_2)^T | 0 \leqslant N_i \leqslant K_i, i = 1,2\}$ 内为全局渐进稳定的；

(2) 当 $\Psi_2 > \psi > \Psi_1$ 时，系统（Ⅲ）存在 4 个平衡点 O，P，Q 和 M，其中 M 为鞍点，P 点在区域 Y 内为全局渐进稳定的，Q 点在区域 X 内为全局渐进稳定的，如图 1 所示（其中 $\widehat{OM}$，$\widehat{MS}$ 为鞍点 M 的两条分界线，且均趋向于 M，下同）；

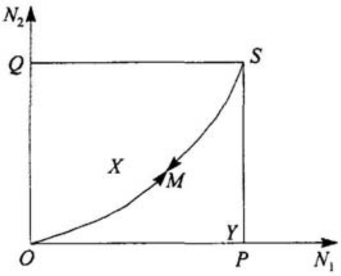

图 1 二维系统（Ⅲ）的相图

(3) 当 $\psi > \max\{\Psi_1, \Psi_2\}$ 时，系统（Ⅲ）存在 3 个平衡点 O，P 和 Q，没有正平衡点，P 点在区域 $\Omega = \{(N_1, N_2)^T | 0 \leqslant N_i \leqslant K_i, i = 1,2\}$ 内为全局渐进稳定的；

(4) 当 $\psi < \min\{\Psi_1, \Psi_2\}$ 时，系统（Ⅲ）存在 3 个平衡点 O，P 和 Q，没有正平衡点，Q 点在区域 $\Omega = \{(N_1, N_2)^T | 0 \leqslant N_i \leqslant K_i, i = 1,2\}$ 内为全局渐进稳定的。

其中 O 为原点，$P = (K_1, 0)^T$，$Q = (0, K_2)^T$，$M = (N_{1E}, N_{2E})^T$。$(N_{1E}, N_{2E})^T$ 为满足下列方程组的正解

$$\begin{cases} r_1 (1 - \frac{N_1}{K_1}) - m N_2 = 0 \\ r_2 (1 - \frac{N_2}{K_2}) - n N_1 = 0 \end{cases} \tag{1}$$

下面，对系统（Ⅱ）进行分析。首先，在空间 $\{(I_1, N_1, I_2, N_2)^T | 0 \leqslant I_i \leqslant N_i \leqslant K_i, i = 1,2\}$ 中讨论平衡点

的存在性。易得,下列 3 个平衡点恒存在:

$$P_0=(0,0,0,0)^T,P_1=(0,0,0,K_2)^T,P_3=(0,K_1,0,0)^T。$$

关于系统(Ⅱ),另有如下结论。

引理 2 对系统(Ⅱ)有下列结论成立:

令
$$R_1=\frac{\beta_{11}K_1^2}{4[\gamma_1+d_1+(1-a_1)r_1]},R_2=\frac{\beta_{22}K_2^2}{4[\gamma_2+d_2+(1-a_2)r_2]}$$

(1) 当 $R_1>1$ 时,平衡点 $P_4^+=(I_{1E}^+,K_1,0,0)^T$ 和 $P_4^-=(I_{1E}^-,K_1,0,0)^T$ 存在;

(2) 当 $R_1=1$ 时,平衡点 $P_4=(\frac{K_1}{2},K_1,0,0)^T$ 存在;

(3) 当 $R_2>1$ 时,平衡点 $P_2^+=(0,0,I_{2E}^+,K_2)^T$ 和 $P_2^-=(0,0,I_{2E}^-,K_2)^T$ 存在;

(4) 当 $R_2=1$ 时,平衡点 $P_2=(0,0,\frac{K_2}{2},K_2)^T$ 存在;

(5) 当 $\Psi_2<\psi<\Psi_1$ 或 $\Psi_2>\psi>\Psi_1$ 成立时,平衡点 $P_5=(0,N_{1E},0,N_{2E})^T$ 存在。

其中,上式中 N_{1E},N_{2E} 如前所定义,下同;并且

$$I_{iE}^+=\frac{1}{2}K_i\left(1+\sqrt{1-\frac{1}{R_i}}\right),I_{iE}^-=\frac{1}{2}K_i\left(1-\sqrt{1-\frac{1}{R_i}}\right),(i=1,2)$$

证明从略。

引理 3 若 $\Psi_2<\psi<\Psi_1$ 或 $\Psi_2>\psi>\Psi_1$,则方程(1)存在着正解$(N_{1E},N_{2E})^T$。并且如果 $A_1-2\beta_{11}N_{1E}^2>0$, $A_2-2\beta_{22}N_{2E}^2>0$ 则有

(1) 当 $R_3>1$ 时,系统(Ⅱ)存在唯一正平衡点 $P_6=(I_{1EE},N_{1E},I_{2EE},N_{2E})^T$;

(2) 当 $R_3\leqslant 1$ 时,系统(Ⅱ)不存在正平衡点。

其中
$$A_1=\gamma_1+\left[d_1+(1-a_1)\frac{r_1N_{1E}}{K_1}\right]+mN_{2E}$$

$$A_2=\gamma_2+\left[d_2+(1-a_2)\frac{r_2N_{2E}}{K_2}\right]+nN_{1E}$$

$$R_3=\frac{\beta_{12}\beta_{21}N_{1E}N_{2E}}{A_1A_2}$$

证明:由引理的条件可知,若存在正数 $I_{1EE}<N_{1E},I_{2EE}<N_{2E}$ 满足下列两式

$$I_1=\frac{(\beta_{22}I_2^2-\beta_{22}N_{2E}I_2+A_2)I_2}{\beta_{21}(N_{2E}-I_2)}\equiv f_1(I_2) \tag{2}$$

$$I_2=\frac{(\beta_{11}I_1^2-\beta_{11}N_{1E}I_1+A_1)I_1}{\beta_{12}(N_{1E}-I_1)}\equiv f_2(I_1) \tag{3}$$

则正平衡点 $P_6=(I_{1EE},N_{1E},I_{2EE},N_{2E})^T$ 存在。

由引理的条件易得,对于式(2)来讲,在区间$[0,N_{2E}]$上,$I_1\equiv f_1(I_2)$ 为 I_2 的单调递增凹函数;对于式(3)来讲,在区间$[0,N_{1E}]$上,$I_2\equiv f_2(I_1)$ 为 I_1 为的单调递增凹函数。

并且
$$f_1(0)=\frac{A_2}{\beta_{21}N_{2E}},f_2(0)=\frac{A_1}{\beta_{12}N_{1E}}$$

可知,当 $R_3>1$ 时,$f_1(I_2)$ 与 $f_2(I_1)$ 在第一象限内存在唯一的正的交点$(I_{1EE},I_{2EE})^T(0<I_{1EE}<N_{1E},0<I_{2EE}<N_{2E})$,从而系统(Ⅱ)存在唯一正平衡点 P_6;当 $R_3\leqslant 1$ 时,在第一象限内,$f_1(I_2)$ 与 $f_2(I_1)$ 只在原点相交,从而系统(Ⅱ)不存在正平衡点。

2 主要结果

考察系统(Ⅱ)的除 P_6 外的各个平衡点的稳定性态或吸引性,有下列定理成立。

定理 1 对于系统(Ⅱ)来讲,有下列结论成立:

(1) P_0 点在 Ω_1 内不稳定；

(2) 当 $\Psi_2 > \psi > \Psi_1, R_2 < 1$ 时，P_1 点在区域 Ω_2 内全局渐进稳定；

(3) 当 $\Psi_2 > \psi > \Psi_1, R_2 > 1$ 时，P_2^+ 点在区域 Ω_3 内全局渐进稳定，P_2^- 点不稳定；当 $\Psi_2 > \psi > \Psi_1, R_2 = 1$ 时，P_2 点在区域 Ω_3 内全局渐进稳定；

(4) 当 $\psi < \min\{\Psi_1, \Psi_2\}, R_2 < 1$ 时，P_1 点在区域 Ω_4 内全局渐进稳定；

(5) 当 $\psi < \min\{\Psi_1, \Psi_2\}, R_2 > 1$ 时，P_2^+ 点在区域 Ω_5 内全局渐进稳定，P_2^- 点不稳定；当 $\psi < \min\{\Psi_1, \Psi_2\}, R_2 = 1$ 时，P_2 点在区域 Ω_5 内全局渐进稳定；

(6) 当 $\Psi_2 > \psi > \Psi_1, R_1 < 1$ 时，P_3 点在区域 Ω_6 内全局渐进稳定；

(7) 当 $\Psi_2 > \psi > \Psi_1, R_1 > 1$ 时，P_4^+ 点在区域 Ω_7 内全局渐进稳定，P_4^- 点不稳定；当 $\Psi_2 > \Phi > \Psi_1, R_1 = 1$ 时，P_4 点在区域 Ω_7 内全局渐进稳定；

(8) 当 $\psi > \max\{\Psi_1, \Psi_2\}, R_1 < 1$ 时，P_3 点在区域 Ω_8 内全局渐进稳定；

(9) 当 $\psi > \max\{\Psi_1, \Psi_2\}, R_1 > 1$ 时，P_4^+ 点在区域 Ω_9 内全局渐进稳定，P_4^- 点不稳定；当 $\psi > \max\{\Psi_1, \Psi_2\}, R_1 = 1$ 时，P_4 点在区域 Ω_9 内全局渐进稳定；

(10) 当 $\Psi_2 < \psi < \Psi_1$ 时，P_5 点存在，又当 $A_1 - 2\beta_{11}N_{1E}^2 > 0, A_2 - 2\beta_{22}N_{2E}^2 > 0$，且 $R_3 < 1$ 时，P_5 点在区域 Ω_{10} 内全局渐进稳定。

其中
$$\Omega_1 = \{(I_1, N_1, I_2, N_2)^T \mid 0 \leqslant I_i \leqslant N_i \leqslant K_i, i = 1,2\}$$
$$\Omega_2 = \{(I_1, N_1, I_2, N_2)^T \mid 0 \leqslant I_i \leqslant N_i \leqslant K_i, i = 1,2, (N_1, N_2)^T \in X\}$$
$$\Omega_3 = \{(I_1, N_1, I_2, N_2)^T \mid 0 \leqslant I_i \leqslant N_i \leqslant K_i, i = 1,2, (N_1, N_2)^T \in X, I_2 \neq 0\}$$
$$\Omega_4 = \{(I_1, N_1, I_2, N_2)^T \mid 0 \leqslant I_i \leqslant N_i \leqslant K_i, i = 1,2, N_2 \neq 0\}$$
$$\Omega_5 = \{(I_1, N_1, I_2, N_2)^T \mid 0 \leqslant I_i \leqslant N_i \leqslant K_i, i = 1,2, N_2 \neq 0, I_2 \neq 0\}$$
$$\Omega_6 = \{(I_1, N_1, I_2, N_2)^T \mid 0 \leqslant I_i \leqslant N_i \leqslant K_i, i = 1,2, (N_1, N_2)^T \in Y\}$$
$$\Omega_7 = \{(I_1, N_1, I_2, N_2)^T \mid 0 \leqslant I_i \leqslant N_i \leqslant K_i, i = 1,2, (N_1, N_2)^T \in Y, I_1 \neq 0\}$$
$$\Omega_8 = \{(I_1, N_1, I_2, N_2)^T \mid 0 \leqslant I_i \leqslant N_i \leqslant K_i, i = 1,2, N_1 \neq 0\}$$
$$\Omega_9 = \{(I_1, N_1, I_2, N_2)^T \mid 0 \leqslant I_i \leqslant N_i \leqslant K_i, i = 1,2, N_1 \neq 0, I_1 \neq 0\}$$
$$\Omega_{10} = \{(I_1, N_1, I_2, N_2)^T \mid 0 \leqslant I_i \leqslant N_i \leqslant K_i, i = 1,2, N_1 \neq 0, N_2 \neq 0\}$$

证明：对结论(10)加以证明。任取系统(Ⅱ)一个解 $[I_1(t), N_1(t), I_2(t), N_2(t)]^T$，其初始值 $[I_1(t_0), N_1(t_0), I_2(t_0), N_2(t_0)]^T \in \Omega_{10}$。显然，当 $t \geqslant t_0$ 时，此解恒位于 Ω_{10} 区域内。

考察点 P_5 的局部渐进稳定性。易得，系统(Ⅱ)在点 $P_5 = (0, N_{1E}, 0, N_{2E})^T$ 处的特征方程为
$$[\lambda^2 - (b_{11} + b_{33})\lambda + (b_{11}b_{33} - b_{13}b_{31})] \cdot [\lambda^2 - (b_{22} + b_{44})\lambda + (b_{22}b_{44} - b_{24}b_{42})] = 0$$

其中
$$b_{11} = -A_1, b_{13} = \beta_{12}N_{1E}, b_{22} = -\frac{r_1}{K_1}N_{1E}, b_{24} = -mN_{1E}$$
$$b_{31} = \beta_{21}N_{2E}, b_{33} = -A_2, b_{42} = -nN_{2E}, b_{44} = -\frac{r_2}{K_2}N_{2E}$$

由定理条件可得 $b_{11} + b_{33} < 0, b_{22} + b_{44} < 0, b_{11}b_{33} - b_{13}b_{31} > 0, b_{22}b_{44} - b_{24}b_{42} > 0$。

从而，特征根均具有负实部。故 P_5 点在区域 Ω_{10} 内为局部渐进稳定的。

考察点 P_5 的吸引性。任取系统(Ⅱ)一个解 $[I_1(t), N_1(t), I_2(t), N_2(t)]^T \in \Omega_{10}$，则 $\lim\limits_{t\to+\infty} N_1(t) = N_{1E}$，$\lim\limits_{t\to+\infty} N_2(t) = N_{2E}$，并且有系统(Ⅳ)：
$$\begin{cases} \dot{I}_1 = (N_1 - I_1)(\beta_{11}I_1^2 + \beta_{12}I_2) - \gamma_1 I_1 - \left[d_1 + (1 - a_1)\dfrac{r_1 N_1}{K_1}\right]I_1 - mN_2 I_1 \\ \dot{I}_2 = (N_2 - I_2)(\beta_{21}I_1 + \beta_{22}I_2^2) - \gamma_2 I_2 - \left[d_2 + (1 - a_2)\dfrac{r_2 N_2}{K_2}\right]I_2 - nN_1 I_2 \end{cases}$$

考察其极限系统(Ⅴ)：

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = (N_{1E} - x_1)(\beta_{11}x_1^2 + \beta_{12}x_2) - \gamma_1 x_1 - \left[d_1 + (1-a_1)\dfrac{r_1 N_{1E}}{K_1}\right]x_1 - mN_{2E}x_1 \\ \dot{x}_2 = (N_{2E} - x_2)(\beta_{21}x_1 + \beta_{22}x_2^2) - \gamma_2 x_2 - \left[d_2 + (1-a_2)\dfrac{r_2 N_{2E}}{K_2}\right]x_2 - nN_{1E}x_2 \end{cases}$$

由定理条件及引理 3 知，系统（Ⅴ）在第一象限只有平衡点 $O=(0,0)^T$。从而，易知其在第一象限内没有闭轨和奇异闭轨线。于是，$[I_1(t),I_2(t)]^T$ 的 ω 极限集为 $\{(0,0)^T\}$。即有 $\lim\limits_{t\to+\infty}(I_1,I_2)=(0,0)^T$，故可知点 P_5 在区域 Ω_{10} 内为全局吸引的，从而点 P_5 在区域 Ω_{10} 内为全局渐进稳定的。

其他结论类似可证得，略。关于正平衡点 P_6 的情况，另文讨论。

若系统（Ⅱ）中不存在交叉感染现象，即 $\beta_{ij}=0(i\neq j)$，有下述定理成立。

定理 2　若系统（Ⅱ）中不存在交叉感染现象，即 $\beta_{ij}=0(i\neq j)$，则有：

当 $\Psi_2<\psi<\Psi_1$ 时，则 P_5 点存在，且当 $A_1-2\beta_{11}N_{1E}^2>0, A_2-2\beta_{22}N_{2E}^2>0$ 时，P_5 点在区域 Ω^* 内全局渐进稳定，其中

$$\Omega^*=\{(I_1,N_1,I_2,N_2)^T\,|\,0\leqslant I_i\leqslant N_i\leqslant K_i, i=1,2, N_1\neq 0, N_2\neq 0\}。$$

证明从略。

从上面的结论可以看出，当条件 $\Psi_2<\psi<\Psi_1, A_1-2\beta_{11}N_{1E}^2>0, A_2-2\beta_{22}N_{2E}^2>0$ 满足时，两种群持续生存，当系统中疾病交叉传染且疾病流行时，若切断疾病交叉传染，疾病就会消亡。

参考文献：

[1] Dushoff J, Huang W, Castillo-Chavez C. Backwards bifurcations and catastrophe in simple models of fatal diseases[J]. J Math Biol, 1998, 36(3): 227-248.

[2] Hyman J M, Li J, Stanley E A. The differential infectivity and staged progression models for the transmission of HIV [J]. Math Biosci, 1999, 155: 77-109.

[3] Keeling M J, Grenfell B T. Effect of variability in infection period on the persistence and spatial spread of infectious diseases[J]. Math Biosci, 1998, 147: 207-226.

[4] 韩丽涛，原三领，马知恩. 两种群相互竞争的自治类型的 SIS 传染病模型[J]. 西安交通大学学报，2001, 35(8): 864-867.

SIS epidemic model of two competitive species with nonlinear incidence

ZHU Wan-zhen, XU Mei-sheng

(Dept. of Science, Zhejiang University of Science and Technology, Hangzhou 310023, China)

Abstract: A SIS epidemic model with nonlinear infection rate is formulated for two competitive species. And the threshold conditions whether or not some equilibrium points are stable are obtained. It is discovered that under proper condition, the disease would die out without the cross-infection for both species.

Key words: epidemic model; cross-infection; regional asymptotic stability