浙江科技学院学报，第16卷第2期，2004年6月
Journal of Zhejiang University of Science and Technology
Vol. 16 No. 2, June 2004

协差阵在随机变量相互独立性中的应用

胡　月
（浙江科技学院 理学系，浙江 杭州 310023）

摘　要：在多元正态分布下通过对协差阵的研究，得到其对应的 $\overline{X}$ 与 S_n^2 相互独立的一个充分条件和一个必要条件。

关键词：协差阵；$\overline{X}$ 与 S_n^2 相互独立；充分条件；必要条件
中图分类号：O212.4　　　**文献标识码**：A　　　**文章编号**：1671-8798(2004)02-0080-04

经典的多元分析理论是建立在其数据服从正态分布的假设前提下，这样的假定带来了一系列理论分析上的好处，尤其是像不相关等价于独立性，条件期望具有线性形式及中心极限定理保证了在大样本的前提下正态性得以成立等。因此，在正态假定下建立起的多元统计方法具有理论上的严谨及计算上以线性问题为主的优点[1]。但对于在多元正态分布下对应的 $\overline{X}$ 与 S_n^2 相互独立的问题，几乎没有研究，尤其是从对协差阵入手考虑研究此类问题较少。这里，笔者将从协差阵入手研究在多元正态分布下对应的 $\overline{X}$ 与 S_n^2 相互独立的有关问题，不但形式简捷，而且有一定的理论价值。

设随机向量 $\boldsymbol{X} \sim \boldsymbol{N}(\mu, \sum)$，其中 $\boldsymbol{X} = (X_1, X_2, \cdots, X_n)'$，$\mu = (\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_n)'$，$\sum$ 为 n 阶正定阵，

$$\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} X_j, \quad S_n^2 = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}(X_j - \overline{X})^2,$$

$$\sum = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix} \quad (b_{ij} = b_{ji},\ 1 \leqslant i, j \leqslant n)$$

1　$\overline{X}$ 与 S_n^2 相互独立的充分条件

定理1　设随机向量 $\boldsymbol{X} \sim \boldsymbol{N}(\mu, \sum)$，且 $\sum$ 的各行元素之和相等，即 $\sum_{k=1}^{n} b_{jk} = \lambda, (j = 1, 2, \cdots, n)$，则 $\overline{X}$ 与 S_n^2 相互独立。

证明　令 $\xi = \left(\frac{1}{\sqrt{n}}, \frac{1}{\sqrt{n}}, \cdots, \frac{1}{\sqrt{n}}\right)'$，易知 $\sum \xi = \lambda \xi$，即 λ 是 $\sum$ 的一个特征值，ξ 是 λ 对应的一个特征向量。

令
$$\boldsymbol{U} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{n}} & \frac{1}{\sqrt{n}} & \cdots & \frac{1}{\sqrt{n}} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix}$$

收稿日期：2003-12-22
作者简介：胡　月（1964—　），男，河南西峡人，副教授，理学硕士，主要从事计算数学、数理统计学和数学教育教学研究。

是由 $\sum$ 的所有特征值 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 对应的特征向量构成的正交阵。作变换 $\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{U}\boldsymbol{X}$，则 $\boldsymbol{Y}$ 的各分量 $Y_1,Y_2,\cdots,Y_n$ 相互独立。且

$$\overline{X}=\frac{1}{\sqrt{n}}Y_1,\quad S_n^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2-(\overline{X})^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}Y_i^2-\frac{1}{n}Y_1^2=\frac{1}{n}\sum_{j=2}^{n}Y_j^2。$$

所以，$\overline{X}$ 与 S_n^2 相互独立。

2　$\overline{X}$ 与 S_n^2 相互独立的必要条件

引理　设 $\boldsymbol{X}\sim \boldsymbol{N}(0,\sum)$，其中，$\boldsymbol{X}=(X_1,X_2,\cdots,X_n)'$，$(j_1,j_2,\cdots,j_n)$ 是 $(1,2,\cdots,n)$ 的置换向量，存在 $1\leqslant k_j\leqslant n(j=1,2,\cdots,r)$，使 $\sum_{j=1}^{r}k_j=n$，且 $\sum$ 的各元素满足：

$$\sum_{t=1}^{k_1}b_{j_lj_t}=\lambda_1,\ (l=1,2,\cdots,k_1)$$

$$\sum_{t=k_1+1}^{k_1+k_2}b_{j_lj_t}=\lambda_2,\ (l=k_1+1,\cdots,k_1+k_2)$$

$$\sum_{t=k_1+k_2+\cdots+k_{r-1}+1}^{k_1+k_2+\cdots+k_r}b_{j_lj_t}=\lambda_r,\ (l=k_1+\cdots+k_{r-1}+1,\cdots,k_1+k_2+\cdots+k_r)$$

其余各元素均为零。

又设 $K'=\left(\sqrt{k_1},\sqrt{k_2},\cdots,\sqrt{k_r}\right)$

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}\frac{1}{\lambda_1}-2it\left(1-\frac{k_1}{n}\right) & 2it\frac{\sqrt{k_1k_2}}{n} & \cdots & 2it\frac{\sqrt{k_1k_r}}{n}\\ 2it\frac{\sqrt{k_2k_1}}{n} & \frac{1}{\lambda_2}-2it\left(1-\frac{k_2}{n}\right) & \cdots & 2it\frac{\sqrt{k_2k_r}}{n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 2it\frac{\sqrt{k_rk_1}}{n} & 2it\frac{\sqrt{k_rk_2}}{n} & \cdots & \frac{1}{\lambda_r}-2it\left(1-\frac{k_r}{n}\right)\end{bmatrix}$$

则当 $\overline{X}$ 与 S_n^2 相互独立时，$K'A^{-1}K=\sum_{j=1}^{r}k_j\lambda_j$。

证明　(1) 设 $(j_1,j_2,\cdots,j_n)=(1,2,\cdots,n)$。

$$设\ \boldsymbol{U}=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{k_1}}\cdots\frac{1}{\sqrt{k_1}} & 0\cdots0 & 0\cdots0 & 0\cdots0 & 0\cdots0\\ 0\cdots0 & \frac{1}{\sqrt{k_2}}\cdots\frac{1}{\sqrt{k_2}} & 0\cdots0 & 0\cdots0 & 0\cdots0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0\cdots0 & 0\cdots0 & 0\cdots0 & 0\cdots0 & \frac{1}{\sqrt{k_r}}\cdots\frac{1}{\sqrt{k_r}}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\end{bmatrix}$$

为 $\sum$ 的所有特征值对应的特征向量构成的正交阵。作变换 $\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{U}\boldsymbol{X}$，则 $\boldsymbol{Y}$ 的各分量 $Y_1,Y_2,\cdots,Y_n$ 相互独立。

且
$$\begin{cases}Y_1 &= &\frac{1}{\sqrt{k_1}}(X_1+\cdots+X_{k_1})\\ \cdots & \cdots & \cdots\cdots\cdots\\ Y_r &= &\frac{1}{\sqrt{k_r}}(X_{k_{r-1}+1}+\cdots+X_{k_r})\end{cases}$$

有
$$\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}X_j=\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{r}\sqrt{k_j}Y_j \tag{1}$$
$$\sum_{j=1}^{n}(X_j-\overline{X})^2=\sum_{j=1}^{n}X_j^2-n(\overline{X})^2=\sum_{j=1}^{n}Y_j^2-n(\overline{X})^2 \tag{2}$$
可令
$$B=\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{j=1}^{r}\sqrt{k_j}Y_j=\frac{1}{\sqrt{n}}(\sqrt{k_1},\cdots,\sqrt{k_r})\begin{pmatrix}Y_1\\ \vdots\\ Y_r\end{pmatrix} \tag{3}$$
$$C=\sum_{j=r+1}^{n}Y_j^2+\sum_{j=1}^{r}Y_j^2-B^2 \tag{4}$$
$$C_1=\sum_{j=1}^{r}Y_j^2-B^2=Y'\left(I-\frac{1}{n}\begin{pmatrix}\sqrt{k_1}\\ \vdots\\ \sqrt{k_r}\end{pmatrix}(\sqrt{k_1},\cdots,\sqrt{k_r})\right)Y \tag{5}$$
$$C_2=\sum_{j=r+1}^{n}Y_j^2 \tag{6}$$
则 $B=\sqrt{n}\overline{X}, C=nS_n^2, B+C_1$ 的特征函数为：
$$f_{B+C_1(t)}=\frac{1}{(2\pi)^{\frac{r}{2}}\sqrt{\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_r}}\int_{-\infty}^{+\infty}\cdots\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{1}{2}\left[y'Ay-\frac{2it}{\sqrt{n}}K'y\right]}dy_1dy_2\cdots dy_r。$$
作变换 $Y=X+\frac{it}{\sqrt{n}}A^{-1}K$，则
$$f_{B+C_1(t)}=\frac{1}{(2\pi)^{\frac{r}{2}}\sqrt{\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_r}}e^{-\frac{t^2}{2n}K'A^{-1}K}\int_{-\infty}^{+\infty}\cdots\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{1}{2}x'Ax}dx_1dx_2\cdots dx_r \tag{7}$$
又 B 和 C_1 的特征函数为
$$f_{B(t)}=e^{-\frac{1}{2n}(\sum_{j=1}^{r}k_1\lambda_j)t^2} \tag{8}$$
$$f_{C_1(t)}=\frac{1}{(2\pi)^{\frac{r}{2}}\sqrt{\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_r}}\int_{-\infty}^{+\infty}\cdots\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{1}{2}y'Ay}dy_1dy_2\cdots dy_r \tag{9}$$
由于 $B+C_1$ 与 C_2 相互独立，C_2 与 C_1 相互独立。

又由 $\overline{X}$ 与 S_n^2 相互独立易知 B 与 C 相互独立。

根据 $B+C=(B+C_1)+C_2$ 可得
$$f_{B+C_1(t)}=f_{B(t)}\cdot f_{C_1(t)} \tag{10}$$
将 (7) 式，(8) 式，(9) 式代入(10) 式得
$$K'A^{-1}K=\sum_{j=1}^{r}k_j\lambda_j。$$
(2) 当$(j_1,j_2,\cdots,j_n)$是$(1,2,\cdots,n)$的一个置换向量时，存在一个正交阵 $\boldsymbol{E}$，使得 $\boldsymbol{E}'\sum\boldsymbol{E}=\sum''$，$\sum''$满足(1) 式中的条件。则
$$K'A^{-1}K=\sum_{j=1}^{r}k_j\lambda_j。$$
定理 2 设 $\boldsymbol{X}\sim N(\mu,\sum)$，其中 $\boldsymbol{X}=(X_1,X_2,\cdots,X_n)'$，$\mu=(\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_n)'$，$(j_1,j_2\cdots j_n)$ 是$(1,2,\cdots,n)$ 的置换向量，存在 $1\leqslant k_j\leqslant n(j=1,2,\cdots,r)$，使 $\sum_{j=1}^{r}k_j=n$，且 $\sum$ 的各元素满足：$\sum_{t=1}^{k_1}b_{j_lj_t}=\lambda_1$，$(l=1,2,\cdots,k_1)$
$$\sum_{t=k_1+1}^{k_1+k_2}b_{j_lj_t}=\lambda_2,\ (l=k_1+1,\cdots,k_1+k_2)$$

$$\sum_{t=k_1+k_2+\cdots+k_{r-1}+1}^{k_1+k_2+\cdots k_r} b_{j_lj_t}=\lambda_t,\ (l=k_1+\cdots+k_{r-1}+1,\cdots,k_1+k_2+\cdots+k_r)$$

其余各元素均为零。

又设 $K'=(\sqrt{k_1},\sqrt{k_2},\cdots,\sqrt{k_r})$

$$A=\begin{bmatrix} \frac{1}{\lambda_1}-2it\left(1-\frac{k_1}{n}\right) & 2it\frac{\sqrt{k_1k_2}}{n} & \cdots & 2it\frac{\sqrt{k_1k_r}}{n} \\ 2it\frac{\sqrt{k_2k_1}}{n} & \frac{1}{\lambda_2}-2it\left(1-\frac{k_2}{n}\right) & \cdots & 2it\frac{\sqrt{k_2k_r}}{n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 2it\frac{\sqrt{k_rk_1}}{n} & 2it\frac{\sqrt{k_rk_2}}{n} & \cdots & \frac{1}{\lambda_r}-2it\left(1-\frac{k_r}{n}\right) \end{bmatrix}$$

则当 $\overline{X}$ 与 S_n^2 相互独立时，$K'A^{-1}K=\sum_{j=1}^{r}k_j\lambda_j$。

证明　设 $Y=X-\mu$，则 $\boldsymbol{Y}\sim \boldsymbol{N}(0,\sum)$

且　$\overline{Y}=\overline{X}+\mu$，　$S_n^2=\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}(x_j-\overline{x})^2=\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}(y_j-\overline{y})^2$。

$\overline{X}$ 与 S_n^2 相互独立等价于 $\overline{\boldsymbol{Y}}$ 与 S_n^2 相互独立。

由引理得

当 $\overline{X}$ 与 S_n^2 相互独立时，$K'A^{-1}K=\sum_{j=1}^{r}k_j\lambda_j$。

参考文献：

[1] 《现代应用数学手册》编委会．现代应用数学手册·概率统计与随机过程卷[M]．北京：清华大学出版社，2000．328－331．

[2] 张尧庭，方开泰．多元统计分析引论[M]．北京：科学出版社，1982．

[3] 克拉美．统计学数学方法[M]．上海：上海科学出版社，1986．366－367．

[4] 费史·M．概率论与数理统计[M]．王福保译．上海：上海科学出版社，1978．147－150．

Applications of covariance matrices to mutual independence of random variable

HU Yue

(Dept. of Science, Zhejiang University of Science and Technology, Hangzhou 310023, China)

Abstract: By researching of covariance matrices under the multivariate normal distribution, we get one sufficient condition for the corresponding mutual independent $\overline{X}$ and S_n^2 as well as one necessary condition.

Key words: covariance matrix; mutual independent $\overline{X}$ and S_n^2; sufficient condition; necessary condition