浙江科技学院学报,第16卷第2期,2004年6月
Journal of Zhejiang University of Science and Technology
Vol. 16 No. 2, June 2004

关于杆件组合变形的应变能

任 倩[1],应祖光[2]
(1. 浙江科技学院 土木工程学系,浙江 杭州 310023;2. 浙江大学 力学系,浙江 杭州 310027)

摘 要:在线弹性、小变形等基本假设条件下,由于杆件应变能与外作用力不成线性关系,所以杆件组合变形的应变能能否表示为各相应基本变形的应变能之和是个值得讨论的问题。本文从双向弯曲、拉弯、扭弯等组合变形方面详细推导了应变能公式,得出组合应变能为各基本应变能之和。

关键词:组合变形;应变能;基本假设
中图分类号:TB301 **文献标识码**:A **文章编号**:1671-8798(2004)02-0098-03

在材料力学中,杆件的组合变形问题是一个重要内容。杆件变形的形式主要取决于外作用力的情况。杆件特别是由若干个杆件组成的结构,在各种外力作用下常常产生组合变形,例如两个相互垂直平面弯曲的组合或斜弯曲、拉伸(或压缩)与弯曲的组合、扭转与弯曲的组合等。在线弹性、小变形等基本假设条件下,杆件微小的变形相对其尺寸来说可以略去不计,从而可按原始形状与尺寸建立力的平衡关系,并计算应力、变形等。特别是略去了各种变形与力之间的相互影响,而内力、应力、变形等与外作用力成线性关系,因此可将组合变形的结果分解成几部分,分别对应于基本变形情况。这就有了常用的分析杆件组合变形的简便方法,先将外力分解成对应于基本变形的作用力,再利用各种基本变形的结果,按照叠加方法,把它们综合起来得到杆件组合变形的结果。

若干个杆件的变形构成结构的变形与位移。一般情况下,它们之间的几何关系较复杂,不宜从几何方面分析简便地得到准确结果。故能量法就成为计算结构变形的重要方法。对于静变形问题,能量法例如卡氏定理,以应变能为基本量来计算应变能,是成功运用能量法的关键。在一般应力状态下,应变能 U 可表示为[1]

$$U = \int_v u \mathrm{d}V \tag{1}$$

$$u = \frac{1}{2}(\sigma_x\varepsilon_x + \sigma_y\varepsilon_y + \sigma_z\varepsilon_z + \tau_{xy}\gamma_{xy} + \tau_{yz}\gamma_{yz} + \tau_{zx}\gamma_{zx}) \tag{2}$$

式中 u 为单位体积应变能或比能,V 为杆件体积,σ、τ 分别为正应力与切应力,ε、v 分别为正应变与切应变。应用广义胡克定律,通过应力表示应变,则由式(2)可知比能与应力成二次函数关系,从而由式(1)知应变能也与应力成二次函数关系;又应力与外力成线性关系,故应变能与外力成二次函数关系。因此,在线弹性、小变形等基本假设条件下,杆件组合变形时的应力、变形等可表示为外作用力的线性函数,但应变能却为外作用力的非线性函数。于是就出现了一个问题,组合变形的应变能计算中叠加法是否有效,或者说组合变形的应变能是否可以表示为各相应基本变形的应变能之和?许多材料力学教材都未涉及此问题,本文将予以说明。

杆件基本变形主要有轴向拉伸(或压缩)、扭转、平面弯曲等,常见杆件的组合变形有两个相互垂直平面弯曲的组合、轴向拉伸(或压缩)与弯曲的组合、扭转与弯曲的组合等,现逐一分析,其他情况可作类似分析。

收稿日期:2003-11-03
作者简介:任 倩(1969—),女,山东济南人,硕士,讲师,主要从事力学教学及科研工作。

1　两个相互垂直平面弯曲的组合

当横向外作用力不在一个过主惯性轴的纵向平面内时，杆件的变形可以表示为两个相互垂直（过主惯性轴）平面弯曲的组合或斜弯曲，横截面上任意点(y,z)的正应力σ为

$$\sigma=\sigma_y+\sigma_z=\frac{M_yz}{I_y}-\frac{M_zy}{I_z} \tag{3}$$

式(3)中y、z为两个相互垂直的形心主惯性轴，I_y、I_z为相应的惯性矩，M_y、M_z为相应的弯矩。任意点处于单向应力状态，总应力等于两个平面弯曲应力的代数和，比能为

$$u=\frac{1}{2}\sigma\varepsilon=\frac{\sigma^2}{2E}=\frac{(\sigma_y+\sigma_z)^2}{2E} \tag{4}$$

则应变能

$$U=\int_V\frac{(\sigma_y+\sigma_z)^2}{2E}\mathrm{d}V=\int_V\left(\frac{\sigma_y^2}{2E}+\frac{\sigma_z^2}{2E}+\frac{\sigma_y\sigma_z}{E}\right)\mathrm{d}V=U_y+U_z+U_{yz} \tag{5}$$

其中E为材料的弹性模量，U_y、U_z分别表示绕y与z轴平面弯曲的应变能，而

$$U_{yz}=\int_V\frac{\sigma_y\sigma_z}{E}\mathrm{d}V=-\int_V\mathrm{d}x\int_A\frac{M_yM_zyz}{EI_yI_z}\mathrm{d}A=-\int_L\frac{M_yM_zI_{yz}}{EI_yI_z}\mathrm{d}x \tag{6}$$

式(6)中L、A分别为杆件的长度与横截面积。因y与z轴为横截面的主惯性轴，故惯性积$I_{yz}=0$，从而$U_{yz}=0$。则由式(5)得知杆件斜弯曲时的应变能等于两个平面弯曲应变能之和。

2　拉伸（或压缩）与弯曲的组合

当外作用力不垂直于且不沿杆的轴线时，杆件的变形可以表示为轴向拉压与弯曲的组合或偏心拉压，横截面上任意点(y,z)的正应力σ为

$$\sigma=\sigma_x+\sigma_y+\sigma_z=\frac{F_x}{A}+\frac{M_yz}{I_y}-\frac{M_zy}{I_z} \tag{7}$$

式(7)中x为杆的轴线方向，F_x为轴力，A为横截面积。类似地，任意点处于单向应力状态，总应力等于轴向拉压与两个平面弯曲应力的代数和，比能为

$$u=\frac{1}{2}\sigma\varepsilon=\frac{\sigma}{2E}=\frac{(\sigma_x+\sigma_y+\sigma_z)^2}{2E} \tag{8}$$

应变能

$$U=\int_V\frac{(\sigma_x+\sigma_y+\sigma_z)^2}{2E}\mathrm{d}V=\int_V\left(\frac{\sigma_x^2}{2E}+\frac{\sigma_y^2}{2E}+\frac{\sigma_z^2}{2E}+\frac{\sigma_x\sigma_y+\sigma_y\sigma_z+\sigma_z\sigma_x}{E}\right)\mathrm{d}V=U_x+U_y+U_z+U_{xyz} \tag{9}$$

其中U_x表示轴向拉压的应变能，而

$$\begin{aligned}U_{xyz}&=\int_V\frac{\sigma_x\sigma_y+\sigma_y\sigma_z+\sigma_z\sigma_x}{E}\mathrm{d}V=\int_L\mathrm{d}x\int_A\left(\frac{F_xM_yz}{EAI_y}-\frac{M_yM_zyz}{EI_yI_z}-\frac{F_xM_zy}{EAI_z}\right)\mathrm{d}A\\&=\int_L\left(\frac{F_xM_yS_y}{EAI_y}-\frac{M_yM_zI_{yz}}{EI_yI_z}-\frac{F_xM_zS_z}{EAI_z}\right)\mathrm{d}x\end{aligned} \tag{10}$$

因y与z轴为横截面的形心主惯性轴，故静矩$S_y=S_z=0$，惯性积$I_{yz}=0$，从而$U_{xyz}=0$。则由式(9)得知杆件拉压与弯曲组合变形时的应变能等于轴向拉压应变能与两个平面弯曲应变能之和。

3　扭转与弯曲的组合

当杆件受到横截面内的力偶与纵向平面内的横向力共同作用时，其变形可以表示为扭转与弯曲的组合，圆杆横截面上任意点(y,z)的切应力τ与正应力σ分别为

$$\tau=\frac{T\rho}{I_p},\ \sigma=\sigma_y+\sigma_z=\frac{M_yz}{I_y}-\frac{M_zy}{I_z} \tag{11}$$

式(11)中T为扭矩,ρ为点到圆心的距离,I_p为极惯性矩。任意点处于二向应力状态,总应力等于正应力与切应力的几何和,比能为

$$u = \frac{1}{2}(\tau\gamma + \sigma\varepsilon) = \frac{\tau^2}{2G} + \frac{(\sigma_y + \sigma_z)^2}{2E} \tag{12}$$

则应变能

$$U = \int_V \left[\frac{\tau^2}{2G} + \frac{(\sigma_y + \sigma_z)^2}{2E}\right] dV = \int_V \left(\frac{\tau^2}{2G} + \frac{\sigma_y^2}{2E} + \frac{\sigma_z^2}{2E} + \frac{\sigma_y \sigma_z}{E}\right) dV = U_p + U_y + U_z + U_{yz} \tag{13}$$

其中G为材料的切变模量,U_p表示扭转应变能。由上面分析可知$U_{yz} = 0$,则杆件扭转与弯曲组合变形时的应变能等于扭转应变能与弯曲应变能之和。

4 小 结

上述讨论不难推广到其他两种基本变形组合或更一般的两种以上基本变形组合的情况。总之,在线弹性、小变形等基本假设条件下,尽管杆件应变能与外作用力不成线性关系,但是杆件组合变形的应变能仍然可以表示为各相应基本变形的应变能之和。这一结论为应用能量法,如卡氏定理计算结构的变形,以及求解超静定问题提供了应变能计算的理论基础。

参考文献:

[1] 刘鸿文. 材料力学[M]. 第三版. 北京:高等教育出版社,1992.

On strain energy of combined-deformations bar

REN Qian[1], YING Zu-guang[2]

(1. Dept. of Civil Engineering, Zhejiang University of Science and Technology, Hangzhou 310023, China;
2. Dept. of Mechanics, Zhejiang University, Hangzhou 310027, China)

Abstract: Scince the strain energy of the bar is nonlinear with the external force on condition that the primary assumption of the linear elasticity and micro-deformation, it is worth discussing whether strain energy of the combined deformation bar is equal to the sum of strain energy of the corresponding primary deformation. In this paper, the formula of strain energy is derived in detail form the combined deformation like bidirectional bending, tension-bending and torsion-bending deformation. Result illustrates that strain energy of the combined deformation bar could be equal to the sum of each strain energy of the primary deformation.

Key words: combined deformation; strain energy; primary assumption