浙江科技学院学报，第16卷第3期，2004年9月
Journal of Zhejiang University of Science and Technology
Vol. 16 No. 3, Sep. 2004

G-Zadeh 型函数

牟金平
（台州学院 数学系，浙江 临海 317000）

摘　要：在广义序同态的基础上，定义了一种新的 Zadeh 型函数（即 G-Zadeh 型函数），讨论了这种函数的性质，并以此为工具对 L-fuzzy 拓扑空间中的可数性、分离性和紧性进行了刻画。

关键词：完备格；广义序同态；G-Zadeh 型函数；G-同胚
中图分类号：O189.11　　**文献标识码**：A　　**文章编号**：1671-8798(2004)03-0153-04

1965年，L. A. Zadeh 引入了 Zadeh 型函数[1]，1997年，He Wei 将 Zadeh 型函数推广到广义 Zadeh 型函数[2]。本文在完备格上定义了 G-Zadeh 型函数，推广了文献[1]与[2]，用不同于文献[2]的方式定义了同胚映射与同胚不变性质，即 G-同胚映射与 G-同胚不变性质，并得到一些重要的性质与应用。此外，文献[1]与[2]中不必保逆合的一些结果在这里也成立。

本文中的 L 表示完备格，δ,μ 都表示相应模糊格上的余拓扑，$\eta_1^-(e),\eta_2^-[f(e)]$ 分别表示相应拓扑空间中的闭远域族。如无特别指出，文中的记号与文献[1]相同。

1　预备知识

定义 1[3]　设 L_1 与 L_2 为完备格；$f:L_1\to L_2$ 为映射。称 f 为广义序同态，若 f 满足：

(1) $f(a)=0$ 当且仅当 $a=0$；

(2) f 与 f^{-1} 保并，其中 $f^{-1}(b)=\vee\{x\in L_1 \mid f(x)\leqslant b\}(\forall\, b\in L_2)$。

定理 1[3]　设 $f:L_1\to L_2$ 为广义序同态，则：① f 与 f^{-1} 保序；② $\forall\, a\in L_1, f^{-1}f(a)\geqslant a$；③ $\forall\, b\in L_2$，$ff^{-1}(b)\leqslant b$；④ $f(a)\leqslant b\leftrightarrow a\leqslant f^{-1}(b)$；⑤ f^{-1} 保并且保交；⑥ f 是同构，则 f 是一一的且满的 $\leftrightarrow f^{-1}$ 是一一的且满的；⑦ $f^{-1}(1)=1$。

2　主要结果

定义 2　设 $(L_1^X,\delta),(L_2^Y,\mu)$ 为两个 L-fuzzy 拓扑空间，$f:L_1^X\to L_2^Y$ 为广义序同态，$e\in M^*(L_1^X)$。

若 $\forall\, Q\in\eta_2[f(e)], f^{-1}(Q)\in\eta_1(e)$，则称 f 在 e 处连续。若 $\forall\, Q\in\mu, f^{-1}(Q)\in\delta$，则称 f 为广义连续序同态。若 $\forall\, P\in\delta, f(P)\in\mu$，则称 f 为广义闭序同态。

易证，$f:L_1^X\to L_2^Y$ 连续，当且仅当 $\forall\, e\in M^*(L_1^X)$，$f$ 在 e 处连续。

定义 3　设 L_1,L_2 为两个完备格，$f:X\to Y$ 为普通映射，$g:L_1\to L_2$ 为广义序同态。则得一映射 $f_g:L_1^X\to L_2^Y$，其中 $\forall\, A\in L_1^X, f_g(A)(y)=\vee\{g[A(x)]\mid f(x)=y\}$。$\forall\, B\in L_2^Y, f_g^{-1}(B)=\vee\{A\in L_1^X\mid f_g(A)\leqslant B\}$。称 f_g 为 G-Zadeh 型函数。

定理 2　设 $(L_1^X,\delta),(L_2^Y,\mu)$ 为两个 L-fuzzy 拓扑空间，$f:L_1^X\to L_2^Y$ 为广义序同态。则下列条件等价：① f 连续；② $\forall\, A\in L_1^X, f(A^-)\leqslant[f(A))]^-$；③ $\forall\, B\in L_2^Y,[f^{-1}(B)]^-\leqslant f^{-1}(B^-)$。

证明：类似于文献[3]中的 P108 可证此定理。

收稿日期：2003-11-13

作者简介：牟金平（1974—　），男，浙江黄岩人，硕士，主要从事拓扑学研究。

定理3 G-Zadeh 型函数是广义序同态。

证明 (1) 若 $f_g(A)=0$，则 $\forall y \in Y, f_g(A)(y)=0$，即 $\vee\{g[A(x)] \mid f(x)=y\}=0$。从而 $g[A(x)]=0$。由于 g 为广义序同态，故 $A(x)=0$，从而必有 $A=0$。否则，若 $\exists x_0 \in X$ 使得 $A(x_0) \neq 0$。令 $y_0=f(x_0)$，则 $f_g(A)(y_0)=\vee\{g[A(x_0)] \mid f(x)=y_0\} \neq 0$，矛盾！故 $A=0$。

反之，若 $A=0$，则 $\vee g[A(x)]=0$，从而 $\forall y \in Y, f_g(A)(y)=0$，即 $f_g(A)=0$。

(2) 由于 $f_g(\vee A)(y)=\vee\{g[\vee A(x)] \mid f(x)=y\}=\vee\{\vee g[A(x)] \mid f(x)=y\}=\vee f_g(A)(y)$，所以 f_g 保并。

(3) 欲证 f_g^{-1} 保并，先证明一个公式：

$$\forall B \in L_2^Y, f_g^{-1}(B)=g^{-1} \circ B \circ f \tag{1}$$

如果(1)式成立，则

$$f_g^{-1}(\vee B)(x)=g^{-1} \circ(\vee B) \circ f(x)=\vee g^{-1} \circ B \circ f(x)=\vee f_g^{-1}(B)(x)$$

下证公式(1)成立。

事实上，设 $\forall A \in L_1^X$，得 $f_g(A) \leqslant B$。则 $\forall x_0 \in X$，令 $y=f(x_0)$，得：

$$g \circ A(x_0) \leqslant \vee\{g \circ A(x_0) \mid f(x_0)=y\}=f_g(A)(y) \leqslant B[f(x_0)]$$

即 $g \circ A \leqslant B \circ f$ 或 $A \leqslant g^{-1} \circ B \circ f$。

反之，设 $A \leqslant g^{-1} \circ B \circ f$，则 $\forall y_0 \in Y$，

$$f_g(A)(g_0)=\vee\{g[A(x)] \mid f(x)=y_0\} \leqslant \vee\{B \circ f(x) \mid f(x)=y_0\}=B(y_0)$$

因此，$f_g(A) \leqslant B$。

所以，$f_g^{-1}(B)=\vee\{A \mid f_g(A) \leqslant B\}=\vee\{A \mid A \leqslant g^{-1} \circ B \circ f\}=g^{-1} \circ B \circ f$。

根据定义1知，f_g 为广义序同态。

定理4 设 f_g 为 G-Zadeh 型函数，则

(1) f_g 为单射 $\leftrightarrow f$ 与 g 为单射；

(2) f_g 为满射 $\leftrightarrow f$ 与 g 为满射。

证明 (1) 设 f 与 g 为单射，且 $A_1 \neq A_2, A_1, A_2 \in L_1^X$。则有 $x_0 \in X$ 满足 $A_1(x_0) \neq A_2(x_0)$。令 $y=f(x_0)$ 则得：

$$f_g(A_1)(y)=\vee\{g[A_1(x_0)] \mid f(x_0)=y\}=g \circ A_1(x_0)$$

$$f_g(A_2)(y)=\vee\{g[A_2(x_0)] \mid f(x_0)=y\}=g \circ A_2(x_0)$$

由 g 为单射得，$g \circ A_1(x_0) \neq g \circ A_2(x_0)$，故 f_g 为单射。

反之，设 f_g 为单射，$a, b \in L_1, x^1, x^2 \in X$。又设 $f(x_1)=y_1, f(x_2)=y_2$。容易证明 $f_g(x_a^1)=y_{g(a)}^1$，$f_g(x_b^2)=y_{g(b)}^2$。而 $f_g(x_a^1) \neq f_g(x_a^2)$，即有 $y \in Y$ 使得 $f_g(x_a^1)(y) \neq f_g(x_b^2)(y)$。若 $a=b$ 且 $x_1 \neq x_2$，则由 f_g 是单射知，f 是单射。若 $x_1=x_2$，且 $a \neq b$ 时，则由 f_g 是单射知，g 是单射。

(2) 若 f_g 是满的，则 $\forall \lambda \in M(L_2)$，取 $y_\lambda \in M^*(L_2^Y)$，$\exists x_\tau \in M^*(L_1^X)$ 使得 $f(x)=y, f_g(x_\tau)=y_\lambda$。令 $A=x_\tau$，则：

$$\lambda=f_g(A)(y)=f_g(x_\tau)(y)=\vee\{g[x_\tau(z)] \mid f(z)=y\}=g \cdot(x_\tau)(x)=g(\tau)$$

从而 g 也是满射，虽然 f 为满射。

反之，若 f, g 均为满的，则 $\forall y_\lambda \in M^*(L_2^Y)$，$\exists \tau \in M(L_1), x \in X$，使得 $g(\tau)=\lambda, f(x)=y$。令 $A=x_\tau$，则有：$f_g(A)(w)=f_g(x_\tau)(w)=\vee\{g(x_\tau)(z) \mid f(z)=w\}=\begin{cases}\lambda, w=y \\ 0, w \neq y\end{cases}$。即 $f_g(A)=y_\lambda$。故 f_g 为满射。

引理1[3] 设 $f: L_1 \rightarrow L_2$ 为广义序同态，L_1, L_2 为完备格。若 a 是 L_1 中 $\vee$-既约元，则 $f(a)$ 是 L_2 中 $\vee$-既约元。

由引理1及广义序同态的性质得：

引理2 设 $f: L_1 \rightarrow L_2$ 为广义序同态，L_1, L_2 为完备格。若 a 是 L_1 中的非零 $\vee$-既约元，则 $f(a)$ 是 L_2

中的非零 $\vee$ - 既约元。

定理 5　设 L_1^X, L_2^Y 为 F 格。若 $G: L_1^X \to L_2^Y$ 为一一的保并满射，则 G 按 $G^{-1}(B) = \vee \{A \in L_1^X | G(A) \leqslant B\}$ 定义下的逆等于按普通意义下的逆，即 $G^{-1}(B) = A \leftrightarrow G(A) = B$。同时 G^{-1} 也是一一的满射。

证明　见文献[1]定理 1.6.10 的证明过程。

注：设 $f_g: L_1^X \to L_2^Y$ 为一一的满广义序同态，则由定理 5 知 f_g^{-1} 也是 f_g 按普通意义下的映射逆，且 f_g^{-1} 是一一的满的保并映射。令 $G = f_g^{-1}$，可知 G 按定理 5 意义下定义的逆也是映射逆且是一一的满的，即 $(f_g^{-1})^{-1} = f_g$。易证 f_g^{-1} 也是广义序同态并且 f_g 也保交。

定义 4　设 (L_1^X, δ)，(L_2^Y, μ) 为两个 L-fuzzy 拓扑空间。如果存在一一的满的 G-Zadeh 型函数 $f_g: L_1^X \to L_2^Y$ 且 f_g 与 f_g^{-1} 均连续，则称为 (L_1^X, δ) 与 (L_2^Y, μ)G- 同胚。记为 $(L_1^X, \delta) \underset{G}{\cong} (L_2^Y, \mu)$。称 f_g 为 G- 同胚映射。被 G- 同胚映射保持的性质称为 G- 同胚不变性质。

由上述得：

推论 1　若 f_g 为 G- 同胚映射，则 $(f_g^{-1})^{-1} = f_g$，并且 f_g 也保交。

由定义 4、推论 1 与广义序同态的性质得：

定理 6　设 (L_1^X, δ)，(L_2^Y, μ) 为两个 L-fuzzy 拓扑空间。则 $(L_1^X, \delta) \underset{G}{\cong} (L_2^Y, \mu) \leftrightarrow$ 存在一一的满的广义序同态 $f_g: L_1^X \to L_2^Y$，且 f_g 为连续的和闭的。

定理 7　T_{-1} 分离性是 G- 同胚不变性质。

证明　设 (L_1^X, δ)，(L_2^Y, μ) 为两个 L-fuzzy 拓扑空间，且 (L_1^X, δ) 为 T_{-1} 空间。设 $f_g: L_1^X \to L_2^Y$ 为 G- 同胚映射。则 $\forall\, y_{\lambda_1}, y_{\lambda_2} \in M^*(L_2)$ 且 $\lambda_1 \leqslant \lambda_2$，由引理 2 及 g^{-1} 保序且 g 满的，有 $\tau_1, \tau_2 \in L_1$ 使得：$\tau_1 = g^{-1}(\lambda_1) < g^{-1}(\lambda_2) = \tau_2$，$x_{\tau_1}, x_{\tau_2} \in M(L_1)$，$x_{\tau_1} = f_g^{-1}(y_{\lambda_1})$，$x_{\tau_2} = f_g^{-1}(y_{\lambda_2})$。且有 $P_X \in \eta_1^-(x_{\tau_2})$，使得 $x_{\tau_1} \leqslant P_X$。又由于 f_g 为 G- 同胚映射，故 f_g^{-1} 也是连续函数。由推论 1 得：

$$f_g(x_{\tau_1}) = y_{\lambda_1} \leqslant f_g(P_X) \in \eta_2^-(y_{\lambda_2})。$$

从而 (L_2^Y, μ) 亦为 T_{-1} 空间。

同理可得：

定理 8　次 T_0 分离性是 G- 同胚不变性质。

引理 3[3]　设 L_1 与 L_2 是分子格，f 是广义序同态。若 B^* 是 L_1 中的标准小族，则 $f(B^*)$ 是 L_2 中的标准极小族。

定理 9　设 (L_1^X, δ)，(L_2^X, μ) 为两个 L-fuzzy 拓扑空间，$f_g: L_1^X \to L_2^X$ 为 G- 同胚映射。如果 A 是 (L_1^X, δ) 的良紧集，则 $f_g(A)$ 是 (L_2^Y, μ) 中的良紧集。

证明　设 Φ 是 $f_g(A)$ 的 α^*- 远域族，$\alpha^* \in M(L_2)$。由 f_g 为 G- 同胚映射及引理 2 知，对于 A 中任一分子 x_α，满足 $f_g(x_\alpha) = y_{\alpha^*}$ 的分子 y_{α^*} 是 $f_g(A)$ 中高度为 α^* 的分子。又由定理 4 得 f 与 g 既是单射又是满射。所以 Φ 中有闭集 P 使得 $y_{\alpha^*} \not\leqslant P$ 或 $\alpha^* \not\leqslant P(y)$，而这又等价于 $\alpha \not\leqslant f_g^{-1}(P)(x)$ 或 $x_\alpha \not\leqslant f_g^{-1}(P)$。

因为 f_g 连续，所以 $f_g^{-1}(P) \in \eta_1^-(x_\alpha)$。从而 $f_g^{-1}(\Phi)$ 是 A 的 α- 远域族。由 A 为良紧集可知 Φ 有有限子族 $\Phi_1 = \{P_1, P_2, \cdots, P_n\}$，使得 $f_g^{-1}(\Phi_1)$ 是 A 的 α^- - 远域族。以下只需证明：

$$\exists\, s \in \beta_2^*(\alpha^*), \text{s.t.}\ \forall\, y_s \leqslant f_g(A), y_s \not\leqslant P_1 \wedge P_2 \wedge \cdots \wedge P_n \tag{2}$$

由 $f_g^{-1}(\varnothing_1)$ 是 A 的 α^- - 远域族知，有 $r_1 \in \beta_1^*(\alpha)$，使得对 A 中任一分子 x_{r_1}，$\exists\, i \leqslant n$ 满足 $x_{r_1} \not\leqslant f_g^{-1}(P_i)$。即：

$$\exists\, r_1 \in \beta_1^*(\alpha), \forall\, x_{r_1} \leqslant A, x_{r_1} \not\leqslant f_g^{-1}(P_1) \wedge f_g^{-1}(P_2) \cdots \wedge f_g^{-1} P_n \tag{3}$$

现假设 (2) 式不成立。即：

$$\forall\, s \in \beta^*(\alpha^*), \forall\, y_s \leqslant f_g(A), y_s \leqslant P_1 \wedge P_2 \wedge \cdots \wedge P_n \tag{4}$$

由引理 3 知 $\beta_2^*(\alpha^*)$ 为 $g(\alpha) = \alpha^*$ 在 L_2 中的标准极小族。所以由标准极小族的定义知，$\beta_2^*(\alpha^*) = \beta_2[\sup(\beta_2^*(\alpha^*)] = \bigcup \{\beta_2(s) | s \in \beta_2^*(\alpha^*)\}$。令 $g(r_1) = r_2$，则 $r_2 \in \beta_2^*(\alpha^*) \subset \beta_2(\alpha^*)$。所以有 $s \in \beta_2^*(\alpha^*)$ 使

$r_2 \in \beta_2(s)$。设 y_s 满足(4)式,则 $f_g^{-1}(A) \geqslant y_s$。故:

$$f_g(A)(y) = \bigvee \{g[A(x)] \mid f(x) = y\} \geqslant s。$$

由 $r_2 \in \beta_2^*(s)$ 知,有 $x \in X$,使得 $g[A(x)] \geqslant r_2$ 且 $f(x) = y$。从而 $A(x) \geqslant r_1$。即 x_{r_1} 是 A 中的分子且满足(3)式。又 $[f(x)]_{r_2} = y_{r_2} \leqslant y_s$。故由(4)式得:

$$f_g(x_{r_1}) = y_{r_2} \leqslant P_1 \wedge P_2 \wedge \cdots \wedge P_n。$$

即 $f_g^{-1}(y_{r_2}) = x_{r_1} \leqslant f_g^{-1}(P_1 \wedge P_2 \wedge \cdots \wedge P_n) = f_g^{-1}(P_1) \wedge f_g^{-1}(P_2) \cdots \wedge f_g^{-1}(P_n)$。

矛盾!所以(2)式成立。故 $f(A)$ 是 (L_2^Y, μ) 中的良紧集。

由定理2可得:

定理10 设 A 是拓扑空间 (L_1^X, δ) 中的连通集,(L_2^Y, μ) 是任一 L-fuzzy 拓扑空间,$f: L_1^X \to L_2^Y$ 为广义连续序同态。则 $f(A)$ 是 (L_2^Y, μ) 中的连通集。

证明:类似于文献[1]中定理3.1.12的证明。

推论2 L-fuzzy 拓扑空间的连通性是 G-同胚不变性质。

定理11 设 (L_1^X, δ),(L_2^Y, μ) 为两个 L-fuzzy 拓扑空间,$f: L_1^X \to L_2^Y$ 为广义闭序同态,且 f 为满射且保交。则 $W(L_2^Y, \mu) \leqslant W(L_1^X, \delta)$。

证明:类似于文献[1]中定理4.1.9的对偶证明。

推论3 L-fuzzy 拓扑空间的权是 G-同胚不变量。

证明:由推论1与定理11即得。

定理12 设 (L_1^X, δ),(L_2^Y, μ) 为两个 L-fuzzy 拓扑空间,$f: L_1^X \to L_2^Y$ 为广义连续序同态,且 f 为满射。则 $d(L_2^Y, \mu) \leqslant d(L_1^X, \delta)$。

证明:类似于文献[1]中定理4.1.20的证明。

推理4 L-fuzzy 拓扑空间的浓度是 G-同胚不变量。

定理13 设 (L_1^X, δ) 为准 Lindelöf 空间,(L_2^Y, μ) 是任一 L-fuzzy 拓扑空间,$f: L_1^X \to L_2^Y$ 为满广义连续序同态且保交。则 (L_2^X, μ) 也是准 Lindelöf 空间。

证明:类似于文献[1]中定理4.2.23的对偶证明。

定理14 设 (L_1^X, δ),(L_2^Y, μ) 为两个 L-fuzzy 拓扑空间。$f_g: L_1^X \to L_2^Y$ 为连续的满的 G-Zadeh 型函数,$A \in L_1^X$。如果 A 具有准 Lindelöf 性质,则 $f_g(A)$ 也具有准 Lindelöf 性质。

证明:类似于文献[1]中定理4.2.21的证明。

参考文献:

[1] 王国俊. *L*-fuzzy 拓扑空间论[M]. 西安:陕西师范大学出版社,1998.

[2] He Wei. Generalized Zadeh function[J]. Fuzzy Sets and System. 1998,97:381-386.

[3] 王国俊,赵东升,樊太和,等. 拓扑分子格理论[M]. 西安:陕西师范大学出版社,1990.

G-Zadeh functions

MOU Jin-ping

(Dept. of Mathematics, Taizhou University, Linhai 317000, China)

Abstract: *G*-Zadeh functions is introduced by generalized order-homomorphisms in complete lattece. Many properties of *G*-Zadeh functions are disscussed, based on which, many concepts such as countablity, separation and compactness are characterrized in *L*-fuzzy topological spaces.

Key words: complete lattice; generalized order-homomorphisms; *G*-Zadeh functions; *G*-homeomorphism