浙江科技学院学报,第16卷第3期,2004年9月
Journal of Zhejiang University of Science and Technology
Vol. 16 No. 3, Sep. 2004

耦合变换下耗散电磁系统微观 Lagrange 量的导出

王长荣，邓学明
(浙江科技学院 理学系，浙江 杭州 310023)

摘　要：以正常态的电子及简正模的振子集合为环境,分析了电磁系统与环境之间的耗散关系,计算了由此产生的相互作用 Lagrange 量,并通过坐标耦合变换,进一步导出了便于路径积分的总体系的微观 Lagrange 量的直观表示。
关键词：耦合变换；耗散；电磁系统；Lagrange 量
中图分类号：O413.3　　**文献标识码**：A　　**文章编号**：1671-8798(2004)03-0157-02

宏观体系的基本特征是它和环境的相互作用,一般情况下它是不可逆的,并趋向于抹掉系统的量子相干。对于一个理想的超导回路,在无环境(耗散)作用下,若有磁通 Φ 穿过回路,由电磁理论知其拉氏作用量为:

$$L=\frac{1}{2}C\dot{\Phi}^2-\frac{1}{2L_H}\Phi^2 \tag{1}$$

相应的运动微分方程为:

$$\ddot{\Phi}+\frac{1}{CL_H}\Phi=0 \tag{2}$$

(1)式中,C 为回路的电容,L_H 为自感,(2)式表明系统是一个以 Φ 为参量的自由电磁振荡。

但若系统中存在着电导率 σ,其传导电流 I_n 流过时将产生耗散,体系与环境将产生相互作用。作为无 σ 存在的(1)式和(2)式将不再成立,因而必须考虑由于系统-环境相互作用而导致的耗散。本文从微观角度对这一问题进行分析。

1　环境作用下系统微观拉氏量的计算

在微观情况下,环境就是处于正常态的电子,从而,体系-环境相互作用的拉氏量为:

$$\Delta L=\int_V \boldsymbol{j}(\boldsymbol{r})\cdot\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})\mathrm{d}V$$

式中

$$\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r})=\sum_i e v_i\delta^3(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_i)$$

为正常态电子电流密度,$\boldsymbol{v}$ 是电子速度,则有[1,2]:

$$\Delta L=I_n\Phi \tag{3}$$

设 $Q=Q(t)$ 为在 t 时间内流经截面 S 的电荷量,则正常电流:

$$I_n=\frac{\mathrm{d}Q(t)}{\mathrm{d}t}=\dot{Q} \tag{4}$$

由(3)式

$$\Delta L=I_n\Phi=\Phi\dot{Q} \tag{5}$$

电荷 Q 是和电阻有关的量,电阻可看作为大量简正模的振子集合,用 q_α 代表简正坐标,α 为简正模式[3],

收稿日期：2003-12-09

作者简介：王长荣(1953—　),男,湖北鹤峰人,教授,硕士生导师,主要从事量子理论及大学物理课程与教学论的教学与研究。

则：
$$Q = \sum_{\alpha} \widetilde{C}_{\alpha} q_{\alpha} \tag{6}$$

故(5)式可进一步表示为：
$$\Delta L = \Phi \sum_{\alpha} \widetilde{C}_{\alpha} \dot{q}_{\alpha} \tag{7}$$

环境作为质量为 m，频率为 ω 的振子，具有的拉氏量 L_2 为：
$$L_2 = \sum_{\alpha} \frac{1}{2} m \dot{q}_{\alpha}{}^2 - \sum_{\alpha} \frac{1}{2} m \omega^2 q_{\alpha}^2 \tag{8}$$

所以，在考虑到体系 - 环境的相互作用后，总体系的拉氏量就是：
$$L = L_1 + L_2 + \Delta L = \frac{1}{2} C \Phi^2 - \frac{1}{2L_H} \Phi^2 + \sum_{\alpha} \frac{1}{2} m \dot{q}_{\alpha}^2 - \sum_{\alpha} \frac{1}{2} m \omega^2 q_{\alpha}^2 + \Phi \sum_{\alpha} \widetilde{C}_{\alpha} \dot{q}_{\alpha} \tag{9}$$

由正则方程，Φ 和 q_{α} 的共轭动量可表示为：
$$\begin{cases} P_{\Phi} = \dfrac{\partial L}{\partial \dot{\Phi}} = C \dot{\Phi} \\ P_q = \dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_{\alpha}} = m \dot{q}_{\alpha} + \Phi \sum\limits_{\alpha} \widetilde{C}_{\alpha} \end{cases}$$

所以，总体系的哈密顿量为：
$$H = \frac{1}{2C} P_{\Phi}^2 + \frac{1}{2L_H} \Phi^2 + \sum_{\alpha} \left(\frac{1}{2m} P_q^2 + \frac{1}{2} m \omega^2 q_{\alpha}^2 \right) - \Phi \sum_{\alpha} \frac{1}{m} \widetilde{C}_{\alpha} P_q + \Phi^2 \sum_{\alpha} \frac{1}{2m} \widetilde{C}_{\alpha}^2 \tag{10}$$

这是坐标 - 动量耦合表示的形式。为了分析各项的物理意义，并便于对环境坐标进行路径积分[4,5]，进一步将其变换为坐标 - 坐标耦合。取生成函数：
$$F(x_{\alpha}, q_{\alpha}) = \sum_{\alpha} m \omega q_{\alpha} x_{\alpha}$$

由正则量子化条件[6] 即可得到：
$$\begin{cases} P_x = - m \omega q_{\alpha} \\ P_q = m \omega x_{\alpha} \end{cases}$$

用 x_{α} 置换 q_{α}，P_x 置换 P_q，得到：
$$H' = \frac{1}{2C} \dot{\Phi}^2 + \frac{1}{2L_H} \Phi^2 + \sum_{\alpha} \left(\frac{1}{2} m \omega^2 x_{\alpha}^2 + \frac{1}{2m} P_x^2 \right) - \Phi \sum_{\alpha} \widetilde{C}_{\alpha} \omega x_{\alpha} + \Phi^2 \sum_{\alpha} \frac{1}{2m} \widetilde{C}_{\alpha}^2 \tag{11}$$

令 $\widetilde{C}_{\alpha} \omega = C_{\alpha}$，总体系的微观拉氏量即为：
$$L' = \frac{1}{2} C \dot{\Phi}^2 - \frac{1}{2L_H} \Phi^2 + \sum_{\alpha} \left(\frac{1}{2} m \dot{x}_{\alpha}^2 - \frac{1}{2} m \omega x_{\alpha}^2 \right) + \Phi \sum_{\alpha} C_{\alpha} x_{\alpha} - \Phi^2 \sum_{\alpha} \frac{C_{\alpha}^2}{2m\omega^2} - \frac{1}{2L_H} \Phi^2 \tag{12}$$

显见，上式中的 $\Phi^2 \sum\limits_{\alpha} \dfrac{C_{\alpha}^2}{2m\omega^2}$ 是重正化项，合并于 $\dfrac{1}{2L_H} \Phi^2$ 一起，改变了体系参数。但由于相互作用项 $\Phi \sum\limits_{\alpha} C_{\alpha} x_{\alpha}$ 亦显示出环境坐标以不同的强度 C_{α} 耦合于体系坐标 Φ，也导致体系参数的变化，但两者符号相反，从而恰好抵消了部分抵消项的作用。

2 结 论

(12)式能正确给出体系所满足的宏观运动方程，因此，可以被接受为进行量子力学计算的出发点。同时，为对环境坐标进行路径积分提供了更为直观的形式。

参考文献：

[1] 倪光炯，陈苏卿. 高等量子力学[M]. 上海：复旦大学出版社，2000. 186，354.

[2] 张启仁. 经典场论[M]. 北京：科学出版社，2003. 132.

[3] Paulsen C, Park J G, Gunther L. Quantum Tunneling of Magnetism[M]. Dordrecht: Kluwer, 1995.

[4] Feynman R P, Hibbs A R. Quantum Mechanics and Path Integrals[M]. New York: McGraw-Hill, 1995.

[5] 张 礼，葛墨林. 量子力学的前沿问题[M]. 北京：清华大学出版社，2000. 137－138.

[6] 张永德. 量子力学[M]. 北京：科学出版社，2002. 252.

(下转第 169 页)

（上接第 158 页）

Derivation on microscopic Lagrangian of electromagnetic dispersion system under the coupling transform

WANG Chang-rong, DENG Xue-ming

(Dept. of Science, Zhejiang University of Science and Technology, Hangzhou, 310023, China)

Abstract: Considering normal electrons and normal mode oscillator aggregations as the surroundings, the paper has analyzed the dispersion relation between electromagnetic system and the surroundings, and has calculated the corresponding interacting Lagrangian. By using coordinate coupling transform, it has derived Lagrangian's visual denotation of total system, which is convenient for path integral.

Key words: coupling transform; dispersion; electromagnetic system; Lagrangian