浙江科技学院学报，第 16 卷第 4 期，2004 年 12 月
Journal of Zhejiang University of Science and Technology
Vol. 16 No. 4, Dec. 2004

四元数矩阵反问题有解的条件

李小梅
（浙江科技学院 理学系，浙江 杭州 310023）

摘　要：探讨了一类四元数矩阵方程 $AX=B$ 反问题有解的条件，给出了问题 P 有解的充要条件。

关键词：四元数体；矩阵方程；实部正定阵；反问题
中图分类号：O151.21　　**文献标识码**：A　　**文章编号**：1671-8798(2004)04-0223-03

本文约定，Q，$Q^{n\times m}$，$Q_r^{n\times m}$ 和 Q_n 分别表示一个实四元数体、Q 上的全体 $n\times m$ 矩阵、Q 上的全体秩为 r 的 $n\times m$ 矩阵、Q 上的全体 n 阶可逆矩阵，A^* 表示 A 的共轭转置矩阵，SC_n 表示 Q 上的全体 n 阶自共轭矩阵（$A^*=A$），rank$A$ 表示 A 的秩，I_i 表示 i 阶单位矩阵，$\mathrm{Re}(b)$ 表示实四元数 b 的实部。

定义 1　设 A 是一个 n 阶四元数方阵（$A\in Q^{n\times n}$），若对于任意的非零 n 维四元数列向量 x（$x\in Q^{n\times 1}$），有 $\mathrm{Re}[x^*Ax]>0$，则称 A 为一个四元数体上的实部正定矩阵，称为 R_{pd} 矩阵。四元数体上的全体实部正定矩阵记为 P_n。

文献[1]于 1982 年提出线性方程组 $AX=B$ 的反问题，使反问题的研究成为人们关注的一个重要课题。文献[1～4]分别讨论了其正定对称解的某些解法及解集合的结构，文献[5]进一步提出了矩阵反问题：给定复数域上 $n\times n$ 矩阵 X 和 B，求 n 阶复正定矩阵 A，$AX=B$。

本文将上述反问题进行推广，并研究如下问题。

问题 P：设 A 是一个 n 阶四元数方阵，给定 X 和 B，求所有的实部正定矩阵 A，使 $AX=B$。其中，$A\in Q^{n\times n}$，$X\in Q^{n\times m}$，$B\in Q^{n\times m}$。

引理 1[6]　设 $A\in SC_n$，且 $A=\begin{bmatrix}A_{11} & A_{12}\\ A_{12}^* & A_{22}\end{bmatrix}$。其中，$A_{11}$，$A_{22}$ 分别是 n_1，n_2 阶矩阵，则 A 是正定自共轭矩阵 $\Leftrightarrow A_{11}$ 与 $A_{22}-A_{12}^*A_{11}^{-1}A_{12}$ 均为正定自共轭矩阵。

定理 1　设 $D\in Q_n$，则 $D^*AD\in P_n$ 的充分必要条件是：$A\in P_n$

证明：必要性　若 $D^*AD\in P_n$，则对任意的非零向量 $x\in Q^{n\times 1}$，$\mathrm{Re}[x^*(D^*AD)x]>0$，由 $D\in Q_n$，得 $D^{-1}\in Q_n$，且 $(D^{-1})^*=(D^*)^{-1}$，故 $(D^{-1})^*(D^*AD)D^{-1}=(DD^{-1})^*A(DD^{-1})=A\in P_n$。

充分性　若 $A\in P_n$，则对任意的非零向量 $x\in Q^{n\times 1}$，$\mathrm{Re}[x^*Ax]>0$，此时 $Dx\in Q^{n\times 1}$，且 $Dx\neq 0$。从而，$\mathrm{Re}[x^*(D^*AD)x]=\mathrm{Re}[(Dx)^*A(Dx)]>0$，$D^*AD\in P_n$。

证毕。

定理 2　设 $A\in Q^{n\times n}$，且 $A=\begin{bmatrix}A_{11} & A_{12}\\ A_{21} & A_{22}\end{bmatrix}$。其中，$A_{11}$，$A_{22}$ 分别是 n_1，n_2 阶矩阵，则 $A\in P_n\Leftrightarrow A_{11}$ 与 $A_{22}-(A_{12}^*+A_{21})(A_{11}+A_{11}^*)^{-1}A_{11}(A_{11}+A_{11}^*)^{-1}(A_{12}+A_{21}^*)\in P_n$。

收稿日期：2004-03-02
作者简介：李小梅（1956—　），女，黑龙江宅清人，讲师，主要从事高等代数的研究。

证明：设 $\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{Q}^{n\times n}$，则 $\boldsymbol{A}$ 可唯一地分解为 $\boldsymbol{A} = H(\boldsymbol{A}) + S(\boldsymbol{A})$。其中，$H(\boldsymbol{A}) = \frac{1}{2}(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{A}^*)$，$S(\boldsymbol{A}) = \frac{1}{2}(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{A}^*)$。

于是有 $2H(\boldsymbol{A}_{11}) = \boldsymbol{A}_{11} + \boldsymbol{A}_{11}^*$，记 $U = (\boldsymbol{A}_{21} + \boldsymbol{A}_{12}^*)(\boldsymbol{A}_{11} + \boldsymbol{A}_{11}^*)^{-1}$

则 $2H(\boldsymbol{A}_{22} - U\boldsymbol{A}_{11}U^*) = \boldsymbol{A}_{22} + \boldsymbol{A}_{22}^* - U(\boldsymbol{A}_{11} + \boldsymbol{A}_{11}^*)U^*$，$2H(\boldsymbol{A}) = \begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_{11} + \boldsymbol{A}_{11}^* & \boldsymbol{A}_{12} + \boldsymbol{A}_{21}^* \\ \boldsymbol{A}_{21} + \boldsymbol{A}_{12}^* & \boldsymbol{A}_{22} + \boldsymbol{A}_{22}^* \end{pmatrix} \in SC_n$。

因为 $\boldsymbol{A} \in \boldsymbol{P}_n \Leftrightarrow H(\boldsymbol{A})$ 为正定自共轭阵。由引理1，$H(\boldsymbol{A})$ 是正定自共轭阵 $\Leftrightarrow$

$$\boldsymbol{A}_{11} + \boldsymbol{A}_{11}^* \text{ 与} (\boldsymbol{A}_{22} + \boldsymbol{A}_{22}^*) - (\boldsymbol{A}_{21} + \boldsymbol{A}_{12}^*)(\boldsymbol{A}_{11} + \boldsymbol{A}_{11}^*)^{-1}(\boldsymbol{A}_{12} + \boldsymbol{A}_{21}^*)$$

均为正定自共轭阵，故 $\boldsymbol{A}_{11} \in \boldsymbol{P}_n$。又

$$\begin{aligned}
&2H[\boldsymbol{A}_{22} - (\boldsymbol{A}_{12}^* + \boldsymbol{A}_{21})(\boldsymbol{A}_{11} + \boldsymbol{A}_{11}^*)^{-1}\boldsymbol{A}_{11}(\boldsymbol{A}_{11} + \boldsymbol{A}_{11}^*)^{-1}(\boldsymbol{A}_{12} + \boldsymbol{A}_{21}^*)] = \\
&\quad 2H(\boldsymbol{A}_{22} - U\boldsymbol{A}_{11}U^*) = \\
&\quad (\boldsymbol{A}_{22} - U\boldsymbol{A}_{11}U^*) + (\boldsymbol{A}_{22} - U\boldsymbol{A}_{11}U^*)^* = \\
&\quad (\boldsymbol{A}_{22} - U\boldsymbol{A}_{11}U^*) + (\boldsymbol{A}_{22}^* - U\boldsymbol{A}_{11}^*U^*) = \\
&\quad (\boldsymbol{A}_{22} + \boldsymbol{A}_{22}^*) - U(\boldsymbol{A}_{11} + \boldsymbol{A}_{11}^*)U^* = \\
&\quad \boldsymbol{A}_{22} + \boldsymbol{A}_{22}^* - (\boldsymbol{A}_{21} + \boldsymbol{A}_{12}^*)(\boldsymbol{A}_{11} + \boldsymbol{A}_{11}^*)^{-1}(\boldsymbol{A}_{11} + \boldsymbol{A}_{11}^*)[(\boldsymbol{A}_{11} + \boldsymbol{A}_{11}^*)^{-1}]^*(\boldsymbol{A}_{12} + \boldsymbol{A}_{21}^*) = \\
&\quad \boldsymbol{A}_{22} + \boldsymbol{A}_{22}^* - (\boldsymbol{A}_{21} + \boldsymbol{A}_{12}^*)(\boldsymbol{A}_{11} + \boldsymbol{A}_{11}^*)^{-1}(\boldsymbol{A}_{12} + \boldsymbol{A}_{21}^*) =
\end{aligned}$$

所以 $\boldsymbol{A}_{22} - (\boldsymbol{A}_{12}^* + \boldsymbol{A}_{21})(\boldsymbol{A}_{11} + \boldsymbol{A}_{11}^*)^{-1}\boldsymbol{A}_{11}(\boldsymbol{A}_{11} + \boldsymbol{A}_{11}^*)^{-1}(\boldsymbol{A}_{12} + \boldsymbol{A}_{12}^*) \in \boldsymbol{P}_n$

证毕。

问题P的求解实际上是求下面的集合：

$$S = \{\boldsymbol{A} \in \boldsymbol{P}_n \mid \boldsymbol{AX} = \boldsymbol{B}, \boldsymbol{X} \in \boldsymbol{Q}_r^{n\times m}, \boldsymbol{B} \in \boldsymbol{Q}^{n\times m}\} \tag{1}$$

对于 $\boldsymbol{X} \in \boldsymbol{Q}_r^{n\times m}$，有 $\boldsymbol{C} \in \boldsymbol{Q}_n, \boldsymbol{D} \in \boldsymbol{Q}_m$ 使

$$\boldsymbol{CXD} = \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{2}$$

令：

$$(\boldsymbol{C}^*)^{-1}\boldsymbol{BD} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{B}_{11} & \boldsymbol{B}_{12} \\ \boldsymbol{B}_{21} & \boldsymbol{B}_{22} \end{bmatrix} \tag{3}$$

其中，$\boldsymbol{B}_{11}$ 是 r 阶的矩阵。

我们有以下的

定理3 集合 $S \neq \Phi \Leftrightarrow \boldsymbol{X}^*\boldsymbol{B} \in \boldsymbol{P}_m$，且当 $S \neq \Phi$ 时，

$$S = \left\{ \boldsymbol{D}^* \begin{pmatrix} \boldsymbol{B}_{11} & (\boldsymbol{B}_{11} + \boldsymbol{B}_{11}^*)V^* - \boldsymbol{B}_{21}^* \\ \boldsymbol{B}_{21} & N + V\boldsymbol{B}_{11}V^* \end{pmatrix} \boldsymbol{D} \,\middle|\, N \in \boldsymbol{P}_{n-r}, V \in \boldsymbol{Q}^{(n-r)\times r} \right\} \tag{4}$$

证明：设 $\boldsymbol{X}^*\boldsymbol{B} \in \boldsymbol{P}_m$，且令 $(\boldsymbol{C}^{-1})^*\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}^{-1} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{A}_{11} & \boldsymbol{A}_{12} \\ \boldsymbol{A}_{21} & \boldsymbol{A}_{22} \end{bmatrix}$

其中，$\boldsymbol{A}_{11}$ 是 r 阶的矩阵。则由式(1)，(2)及(3)得 $\begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_{11} & \boldsymbol{A}_{12} \\ \boldsymbol{A}_{21} & \boldsymbol{A}_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{B}_{11} & \boldsymbol{B}_{12} \\ \boldsymbol{B}_{21} & \boldsymbol{B}_{22} \end{pmatrix}$，从而，$\boldsymbol{A}_{11} = \boldsymbol{B}_{11}$，$\boldsymbol{A}_{21} = \boldsymbol{B}_{21}$。

由定理1知，$(\boldsymbol{C}^{-1})^*\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}^{-1} \in \boldsymbol{P}_n$，故 $\begin{pmatrix} \boldsymbol{B}_{11} & \boldsymbol{A}_{12} \\ \boldsymbol{B}_{21} & \boldsymbol{A}_{22} \end{pmatrix} \in \boldsymbol{P}_n$。令 $N = \boldsymbol{A}_{22} - V\boldsymbol{B}_{11}V^*$，其中 $V = (\boldsymbol{A}_{12}^* + \boldsymbol{B}_{21})(\boldsymbol{B}_{11} + \boldsymbol{B}_{11}^*)^{-1}$。则 $N \in \boldsymbol{P}_n$。从而，$\boldsymbol{A}_{22} = N + V\boldsymbol{B}_{11}V^*$，$\boldsymbol{A}_{12} = -\boldsymbol{B}_{21}^* + (\boldsymbol{B}_{11} + \boldsymbol{B}_{11}^*)V^*$，故 $\boldsymbol{A}$ 可表成(4)中元的形式。

下证 $\boldsymbol{X}^*\boldsymbol{B} \in \boldsymbol{P}_m$。由于 $\boldsymbol{A} \in S$，故对任意的非零向量 $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{Q}^{n\times 1}$，有

$$\mathrm{Re}[x^*\boldsymbol{X}^*\boldsymbol{B}x] = \mathrm{Re}[x^*\boldsymbol{X}^*\boldsymbol{AX}x] = \mathrm{Re}[(\boldsymbol{X}x)^*\boldsymbol{A}(\boldsymbol{X}x)] > 0,$$

故 $\boldsymbol{X}^*\boldsymbol{B} = \boldsymbol{X}^*\boldsymbol{AX} \in \boldsymbol{P}_m$。

这样我们有当 $\boldsymbol{X}^*\boldsymbol{B} \in \boldsymbol{P}_m$ 时，$\boldsymbol{r} = \mathrm{rank}\boldsymbol{X} = m$，且(2)及(3)式分别变为

$$CXD = \begin{pmatrix} I_r \\ 0 \end{pmatrix} \quad 及 \quad (C^*)^{-1}BD = \begin{pmatrix} B_{11} \\ B_{21} \end{pmatrix}$$

故具有(4)式形状的矩阵 A 一定满足 $AX = B$。

并且因为 $X^*B = (D^{-1})^*B_{11}D^{-1} \in P_m$ 时，根据定理 1 知，$B_{11} \in P_m$。从而由定理 2 知，具有(4)式形状的矩阵是 R_{pd} 矩阵。至此，问题 P 得到解决。

参考文献：

[1] 李森林. 几类直接控制系统绝对稳定的充要条件[J]. 科学通报，1982，(10)：581－582.

[2] 郭　忠. 矩阵正定性判定及线性方程组的反问题求解[J]. 科学通报，1987，(2)：95－98.

[3] 王卿文，林春艳. 除环上左线性方程组的反问题[J]. 数学研究，1996，29(2)：91－95.

[4] 王卿文. 线性方程组反问题的推广[J]. 数学通报，1995，(4)：44－46.

[5] Wulei. The re-positive definite solutions to the matrix inverse problem $AX=B$[J]. Linear Algebra Appl，1992，(174)：145－151.

[6] 庄瓦金. 四元数体上的矩阵方程[J]. 数学学报，1987，30(5)：688－694.

Solvability conditions for the inverse problem of a class of the quaternion matrix

LI Xiao-mei

(Dept. of Science, Zhejiang University of Science and Technology, Hangzhou 310023, China)

Abstract: By using the solution to the quaternion matrix inverse problem $AX=B$, the necessary and sufficient conditions for the problem P having solution is studied. The expressions for the general solutions of the problem are P also given.

Key words: the quaternion field; matrix equation; re-positive; inverse problem