浙江科技学院学报，第16卷第4期，2004年12月
Journal of Zhejiang University of Science and Technology
Vol. 16 No. 4, Dec. 2004

论惯量积的定义

王建中
（浙江科技学院 理学系，浙江 杭州 310023）

摘　要：现行的各种理论力学教材对惯量积的定义并不恰当，使得惯量张量的矩阵表示不符合数学中的表达习惯。因此，有的教材给出的惯量张量各分量的统一表达式实际上是错误的。文章给出了惯量积的新定义。

关键词：角动量；张量；惯量张量；惯量积
中图分类号：O313.3　　**文献标识码**：A　　**文章编号**：1671-8798(2004)04-0228-04

刚体在空间的任意运动，总可以看作是平动和转动的合成。平动的刚体可视为质点，所以对刚体运动的研究重点就是转动。质点运动时，质点的动量与它的速度之间的关系

$$\boldsymbol{p} = m\boldsymbol{v}$$

是矢量关系。动量 $\boldsymbol{p}$ 的方向就是速度 $\boldsymbol{v}$ 的方向。而刚体转动时，刚体的角动量与它的角速度之间的关系

$$\boldsymbol{J} = \overleftrightarrow{I} \cdot \boldsymbol{\omega}$$

是张量与矢量的点乘关系。$\overleftrightarrow{I}$ 称为惯量张量。角动量 $\boldsymbol{J}$ 的方向与角速度 $\boldsymbol{\omega}$ 的方向不一定相同。

在三维空间中，二阶张量有九个分量。惯量张量 $\overleftrightarrow{I}$ 用矩阵表示时，是一个对称矩阵。现在使用的各种理论力学教材对惯量积的定义，使得惯量张量的矩阵表示和数学以及物理的其他学科中张量用矩阵表示的一般形式不统一。因而，有的教材给出的惯量张量各分量的统一表达式实际上是错误的。所以，对惯量积的定义需要修正。

1　张量的矩阵表示

为了表述物理规律，要经常使用标量、矢量和张量等不同的物理量。从坐标转动变换的角度来说，如果一个物理量在坐标转动时数值不变，则称此物理量为一标量。如物体的密度、电势等，它们的变换关系为

$$\rho' = \rho$$

如果一个物理量，由三个数表示（称为该物理量的三个分量），在坐标转动变换时，其变换关系为

$$x_i' = \sum_{j=1}^{3} \alpha_{ij} x_j \qquad (i = 1,2,3)$$

则称此物理量为一矢量。例如位矢、速度、力和电场强度等。如果一个物理量，由九个数表示（称为该物理量的九个分量），而坐标变换关系为

$$T_{ij}' = \sum_{k=1}^{3} \sum_{l=1}^{3} \alpha_{ik} \alpha_{jl} T_{kl} \qquad (i,j = 1,2,3)$$

则称此物理量为二阶张量。

收稿日期：2004-09-25
作者简介：王建中（1956—　），男，浙江平湖人，副教授，主要从事浑沌理论应用研究和物理教学工作。

两个矢量

$$A = A_1e_1 + A_2e_2 + A_3e_3$$
$$B = B_1e_1 + B_2e_2 + B_3e_3$$

若进行点积运算，则得到标量，为一个数

$$C_1 = \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} = A_1B_1 + A_2B_2 + A_3B_3$$

若进行叉积运算，则仍得到一个矢量，有三个分量，

$$\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B} = (A_2B_3 - A_3B_2)\boldsymbol{e}_1 + (A_3B_1 - A_1B_3)\boldsymbol{e}_2 + (A_1B_2 - A_2B_1)\boldsymbol{e}_3$$

除此以外，矢量 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 还可进行如下的运算，而得到一个二阶张量

$$\overleftrightarrow{T} = \boldsymbol{AB} = A_1B_1\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_1 + A_1B_2\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_2 + A_1B_3\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_3 + A_2B_1\boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_1 + A_2B_2\boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_2 + A_2B_3\boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_3 + A_3B_1\boldsymbol{e}_3\boldsymbol{e}_1 + A_3B_2\boldsymbol{e}_3\boldsymbol{e}_2 + A_3B_3\boldsymbol{e}_3\boldsymbol{e}_3$$

或

$$\overleftrightarrow{T} = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} T_{ij}\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j$$

二阶张量有九个分量，因而常用矩阵表示：

$$\overleftrightarrow{T} = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{pmatrix} \tag{1}$$

物理学中，许多物理量是张量。例如，弹性体内给定平面每单位面积两方的弹性力称为胁强 $\boldsymbol{P}$，设面元法向的方向余弦为 α,β,γ，则

$$\begin{pmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{xx} & p_{xy} & p_{xz} \\ p_{yx} & p_{yy} & p_{yz} \\ p_{zx} & p_{zy} & p_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$$

或

$$\boldsymbol{P} = \overleftrightarrow{p} \cdot \boldsymbol{n}$$

其中 n 为面元的法向单位矢。而张量

$$\overleftrightarrow{p} = \begin{pmatrix} p_{xx} & p_{xy} & p_{xz} \\ p_{yx} & p_{yy} & p_{yz} \\ p_{zx} & p_{zy} & p_{zz} \end{pmatrix}$$

称为在弹性体内给定点的胁强张量。再例如，对于各向异性的材料，电极化率也是一个张量

$$\overleftrightarrow{\chi} = \begin{pmatrix} \chi_{xx} & \chi_{xy} & \chi_{xz} \\ \chi_{yx} & \chi_{yy} & \chi_{yz} \\ \chi_{zx} & \chi_{zy} & \chi_{zz} \end{pmatrix}$$

三维空间的二阶张量 $\overleftrightarrow{T}$ 可以用 3×3 的矩阵表示。九个矩阵元素 T_{ij} 分别表示张量的九个分量，其中 i 表示矩阵元素所在的行，j 表示元素所在的列。

2　惯量张量

2.1　刚体的角动量

刚体对 O 点的角动量是该刚体所有质点对 O 点的角动量之和：

$$\boldsymbol{J} = \sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{r}_i \times m_i\boldsymbol{v}_i$$

把 $\boldsymbol{v}_i = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}_i$ 代入上式，利用矢量运算关系可得

$$\boldsymbol{J} = \sum_{i=1}^{n} m_i[\boldsymbol{\omega} r_i^2 - \boldsymbol{r}_i(\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{r}_i)]$$

因为

$$\boldsymbol{r}_i = x_i\boldsymbol{i} + y_i\boldsymbol{j} + z_i\boldsymbol{k},\ \boldsymbol{\omega} = \omega_x\boldsymbol{i} + \omega_y\boldsymbol{j} + \omega_z\boldsymbol{k}$$

代入，即得

$$
\begin{aligned}
J_x &= \omega_x \sum_{i=1}^{n} m_i(y_i^2 + z_i^2) - \omega_y \sum_{i=1}^{n} m_i x_i y_i - \omega_z \sum_{i=1}^{n} m_i x_i z_i \\
J_y &= -\omega_x \sum_{i=1}^{n} m_i y_i x_i + w_y \sum_{i=1}^{n} m_i(z_i^2 + x_i^2) - \omega_z \sum_{i=1}^{n} m_i y_i z_i \\
J_z &= -\omega_x \sum_{i=1}^{n} m_i z_i^2 x_i^2 - \omega_y \sum_{i=1}^{n} m_i z_i y_i + \omega_z \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i^2 + y_i^2)
\end{aligned} \tag{2}
$$

J_x 不仅与 ω_x 有关，还与 ω_y 和 ω_z 有关。上述关系用张量来表达是比较方便的。

2.2 惯量张量

如果定义

$$I_{xx} = \sum_{i=1}^{n} m_i(y_i^2 + z_i^2), I_{yy} = \sum_{i=1}^{n} m_i(z_i^2 + x_i^2), I_{zz} = \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i^2 + y_i^2) \tag{3}$$

和

$$I_{yz} = I_{zy} = -\sum_{i=1}^{n} m_i y_i z_i, I_{zx} = I_{xz} = -\sum_{i=1}^{n} m_i z_i x_i, I_{xy} = I_{yx} = -\sum_{i=1}^{n} m_i x_i y_i \tag{4}$$

则(2)式可用张量表达为

$$\begin{pmatrix} J_x \\ J_y \\ J_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix} \tag{5}$$

或

$$\boldsymbol{J} = \overleftrightarrow{I} \cdot \boldsymbol{\omega}$$

其中

$$\overleftrightarrow{I} = \begin{pmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{pmatrix} \tag{6}$$

称为惯量张量。其中对角元素 I_{xx}, I_{yy}, I_{zz} 称为轴转动惯量，非对角元素 I_{yz}, I_{zx}, I_{xy} 称为惯量积。惯量张量是一个二阶对称张量。对角元素和非对角元素共九个量都是惯量张量的分量。

但是，现在通用的理论力学教材[1~3]，却定义

$$I_{yz} = I_{zy} = \sum_{i} m_i y_i z_i, I_{zx} = I_{xz} = \sum_{i=1}^{n} m_i z_i x_i, I_{xy} = I_{yx} = \sum_{i=1}^{n} m_i x_i y_i \tag{7}$$

在这样的定义下，惯量张量为

$$\overleftrightarrow{I} = \begin{pmatrix} I_{xx} & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{yx} & I_{yy} & -I_{yz} \\ -I_{zx} & -I_{zy} & I_{zz} \end{pmatrix} \tag{8}$$

这样的定义就不大自然，与数学中张量用矩阵表示的一般方法不统一。在数学中，张量可用矩阵表示，矩阵的每一个元素代表张量的相应分量，按(4)式的定义，惯量积 I_{ij} 是惯量张量的相应分量，其物理意义非常清楚。如果取(7)式作定义，按数学中张量用矩阵表示的习惯，惯量积 I_{ij} 就不是惯量张量的相应分量，而是惯量张量相应分量的负值。这既模糊了物理概念，也影响了物理与数学之间的和谐，增加了烦琐，不利于记忆。所以，现行教科书中按(7)式所作的定义应该改变，应该采用(4)式作为定义。

当然，对于质量连续分布的刚体，在具体计算时，求和运算实际上是进行积分。所以，惯量张量各分量应定义为

$$I_{xx} = \int (y^2 + z^2)\mathrm{d}m, I_{yy} = \int (z^2 + x^2)\mathrm{d}m, I_{zz} = \int (x^2 + y^2)\mathrm{d}m \tag{9}$$

和

$$I_{yz} = I_{zy} = -\int yz\mathrm{d}m, I_{zx} = I_{xz} = -\int zx\mathrm{d}m, I_{xy} = I_{yx} = -\int xy\mathrm{d}m \tag{10}$$

3 惯量张量分量的统一表达式

由于现在通用的理论力学教材，对惯量积采用了(7) 式的定义，即

$$I_{yz} = I_{zy} = \int yz\mathrm{d}m, I_{zx} = I_{xz} = \int zx\mathrm{d}m, I_{xy} = I_{yx} = \int xy\mathrm{d}m \tag{11}$$

因而所给出的惯量张量各分量的统一表达式[2]

$$I_{x_i x_j} = \int [(\sum_{l=1}^{3} x_l^2)\delta_{ij} - x_i x_j]\mathrm{d}m \qquad (i,j = 1,2,3) \tag{12}$$

实际上与(11) 式是矛盾的。(12) 式中 x_1, x_2, x_3 分别表示 x, y, z，而 δ_{ij} 是克朗内克符号

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

当 i 和 j 相等时，由(12) 式得

$$I_{xx} = \int (y^2 + z^2)\mathrm{d}m, I_{yy} = \int (z^2 + x^2)\mathrm{d}m, I_{zz} = \int (x^2 + y^2)\mathrm{d}m$$

但是，当 i 和 j 不相等时，由(12) 式得

$$I_{yz} = I_{zy} = -\int yz\mathrm{d}m, I_{zx} = I_{xz} = -\int zx\mathrm{d}m, I_{xy} = I_{yx} = -\int xy\mathrm{d}m$$

与(11)式不同，(11)式和(12)式相矛盾。若选择(11)式作为定义，则(12)式就是错误的。也就是说，按现在通用的理论力学教材对惯量积的定义，就没有惯量张量分量简明的统一表达式。而要给出惯量张量分量简明的统一表达式(12)式，必须改变现有对惯量积的定义，而采用(4)式，也即(10)式作为惯量积的定义。

4 结 论

综上所说，现行通用的理论力学教材对于惯量积的定义应该改变。采用(4)式，即(10)式作为惯量积的定义，可以使惯量张量的矩阵表示符合一般数学表达习惯，使惯量积具有明确的物理意义：惯量积是惯量张量的相应分量，也使得惯量张量的各分量有一个统一的表达式。

参考文献：

[1] 周衍伯. 理论力学教程[M]. 第二版. 北京：高等教育出版社，1986. 173－180.

[2] 胡慧玲，林纯镇，吴惟敏. 理论力学基础教程[M]. 北京：高等教育出版社，1986. 219－223.

[3] 梁昆淼. 力学下册（理论力学）[M]. 北京：高等教育出版社，1995. 194－203.

On definition of products of inertia

WANG Jian-zhong

(Dept. of Science, Zhejiang University of Science and Technology, Hangzhou 310023, China)

Abstract: Because of the improper definition of the products of inertia in the books on theortical mechanics being used now, the matrix expression of the tensor of inertia does not conform with the convention in the mathematics. Therefore the unified expression for the components of a tensor of inertia in some textbooks is wrong. A new definition of the products of inertia is proposed in this paper.

Key words: angular momentur; tensor; tensor of inertia; products of inertia