

齿轮接触应力的进一步精确计算

刘鹤然¹, 宋德玉¹, 楼 易¹, 段富斌¹, CHAN C Y²

(1. 浙江科技学院 机电工程学系, 浙江 杭州 310023; 2. 香港理工大学 工业与系统工程系, 香港)

摘 要: 将渐开线展开到 3 阶, 推导了两渐开线齿轮的接触应力, 这是对齿轮接触应力公式的进一步精确化。同时, 介绍了曲线的 3 阶展开的概念, 并比较了精确公式计算结果与原有公式的计算结果。

关键词: 齿轮; 接触; 应力

中图分类号: TH132.41

文献标识码: A

文章编号: 1671-8798(2005)01-0022-03

Precise calculation for contact stress of gears

LIU Hu-ran¹, SONG De-yu¹, LOU Yi¹, DUAN Fu-bin¹, CHAN C Y²

(1. Department of Electromechanical Engineering, Zhejiang University of Science and Technology, Hangzhou 310023, China; 2. Department of Industry and System Engineering, The Hong Kong Polytechnic University, Hong Kong, China)

Abstract: The involutes of gears are developed into the form of third order and the contact stress for involutes of gears are derived. Results of the contact stress of gear surfaces are improved with the new method. The concept of third order development are introduced. And the calculation result is compared with that of the old.

Key words: gear; contact; stress

齿轮接触应力公式已有 100 多年的历史, 在齿轮传动、齿面弹性流体动压润滑等多方面都有广泛应用。接触应力的推导中两齿面用当量圆柱代替, 再展开成 2 阶抛物面。如果接触区很小, 误差不大; 但如果接触区变形很大, 尤其当两渐开线内啮合时, 接触区较大, 仅展开到 2 阶就不够了。本文将渐开线展开到 3 阶, 推导了相应的接触应力公式。而目前常用的方法就是把齿轮接触点附近看成圆柱, 其半径等于曲率半径, 再直接用赫兹公式^[1,2]。

1 渐开线的 3 阶近似

由戴劳公式, 任何曲线在其某一点可展开为:

$$r(u) = r(u_0) + \frac{d}{du}r\Delta u + \frac{1}{2!} \frac{d^2}{du^2}r\Delta u^2 + \frac{1}{3!} \frac{d^3}{du^3}r\Delta u^3 + \dots \quad (1)$$

对渐开线方程:

$$r = [r_b(\sin\theta - \theta\cos\theta) \quad r_b(\cos\theta + \theta\sin\theta)] \quad (2)$$

(2) 式中 r_b 为基圆, θ 为渐开线展角, r 为矢径。求导:

$$r_\theta = r_b[\theta\sin\theta \quad \theta\cos\theta] \quad (3)$$

故切矢和法矢分别为:

$$\tau = [\sin\theta \quad \cos\theta] \quad n = [-\cos\theta \quad \sin\theta] \quad (4)$$

再求导:

$$r_{\theta\theta} = r_b[\sin\theta + \theta\cos\theta \quad \cos\theta - \theta\sin\theta]$$

收稿日期: 2004-10-20

作者简介: 刘鹤然(1953—), 男, 江西南昌人, 教授, 博士, 主要从事齿轮传动研究。

3次导数:

$$r_{\theta\theta} = [2\cos\theta + \theta\sin\theta - (2\sin\theta + \theta\cos\theta)]$$

曲线至其切线的距离 δ :

$$MM_0 = r(u) - r(u_0) =$$

$$\frac{d}{du}r\Delta u + \frac{1}{2!}\frac{d}{du}r\Delta u^2r + \frac{1}{3!}\frac{d}{du}r\Delta u^3 + \dots \quad (5)$$

$$\text{由于: } r_\theta \cdot n = 0 \quad r_{\theta\theta} \cdot n = -r_\theta \theta \quad r_{\theta\theta\theta} \cdot n = -2r_\theta$$

故有:

$$\delta = -r_\theta \theta \Delta \theta^2 / 2 - (2r_\theta) \Delta \theta^3 / 6 \quad (6)$$

沿切线建立 x 坐标,沿法线建立 y 坐标.弧长:

$$\Delta s = \sqrt{r_\theta^2 \Delta \theta^2} = r_\theta \theta \cdot \Delta \theta = \Delta x$$

$$\text{故 } \Delta \theta = \Delta x / r_\theta \theta$$

$$\delta = -\frac{\Delta x^2}{2r_\theta \theta} - \frac{\Delta x^3}{6r_\theta^2 \theta^3} \quad (7)$$

两渐开线在啮合点的相对差曲面:

$$\delta_r = -\frac{1}{2} \left(\frac{1}{r_{b1} \theta_1} - \frac{1}{r_{b2} \theta_2} \right) x^2 - \frac{1}{3} \left(\frac{1}{r_{b1}^2 \theta_1^3} - \frac{1}{r_{b2}^2 \theta_2^3} \right) \Delta x^3 = -k_2 x^2 - k_3 x^3 \quad (8)$$

k_2, k_3 是2次项和3次项的系数。

2 用契贝谢夫多项式求接触应力

引入相对差曲面和综合弹性缩写记号 $\vartheta = \frac{2(1-\gamma_1^2)}{E_1} + \frac{2(1-\gamma_2^2)}{E_2}$, 接触问题转化为以(8)式表示的刚性体压入无限半平面的接触应力。由于(8)式的非对称性,接触应力和接触区也是非对称的。设接触区发生在区段 $-b \leq x \leq a$, 式中 $a, -b$ 为(8)式的最接近于原点的两个根(见图1)。

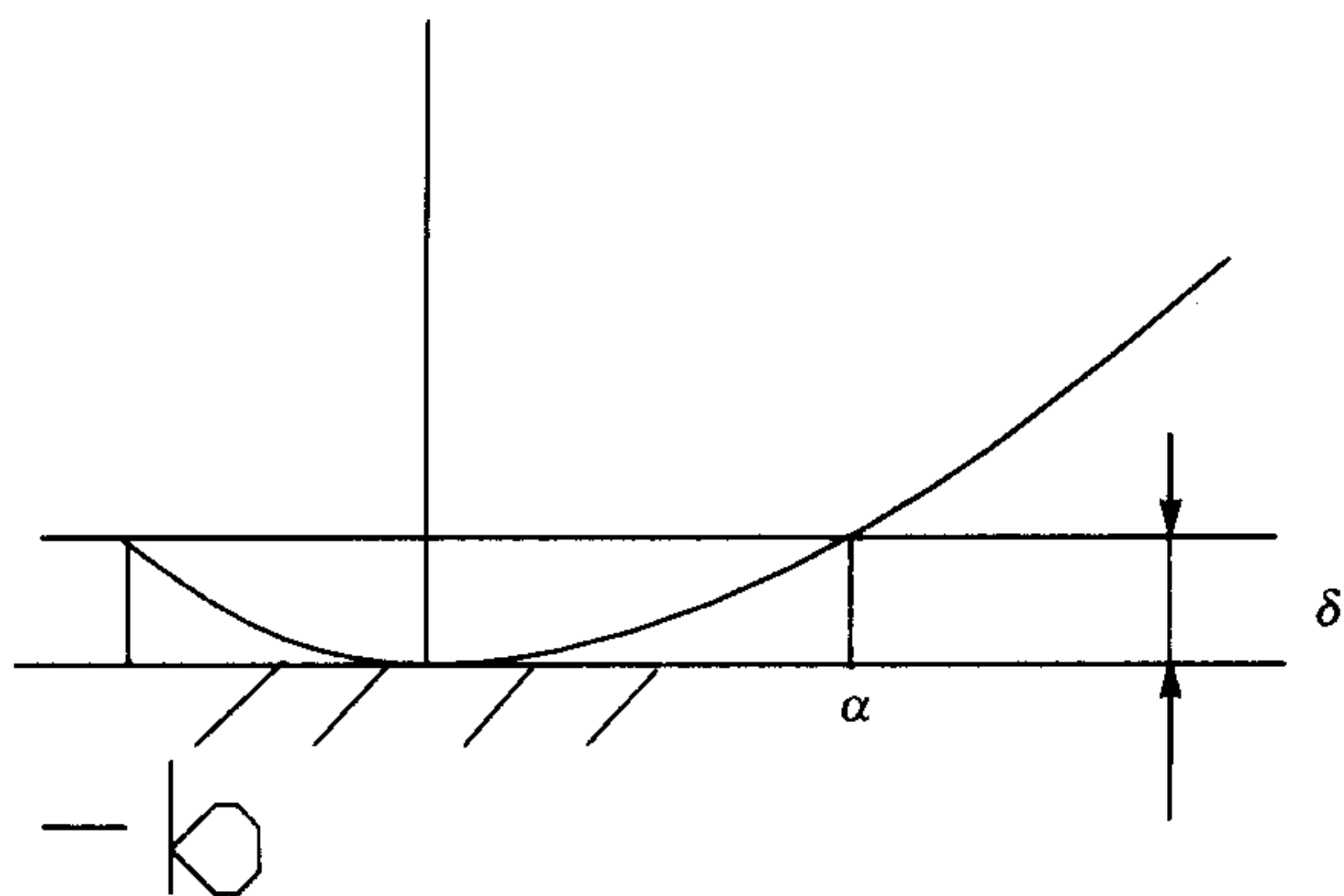


图1 齿轮非对称接触

引入变换:

$$x = l\zeta + c, y = l\eta \quad (9)$$

其中 $l = (a+b)/2, c = (a-b)/2$, 当 $-b \leq x \leq a$ 时, $-1 \leq \zeta \leq 1$

代入(8)式:

$$\eta = y/l = \frac{k_2}{l}(lt+c)^2 + \frac{k_3}{l}(lt+c)^3 = (k_2 c^2 + k_3 c^3)/l + (2k_2 c + 3c^2 k_3)t + (k_2 l + 3lck_3)t^2 + k_3 l^2 t^3 \quad (10)$$

现将位移用契贝谢夫多项式展开:

$$\eta = y/l = \sum_{n=0}^N b_n T_n(t) = b_0 T_0 + b_1 T_1(t) + b_2 T_2(t) + b_3 T_3(t) = b_0 + b_1 t + b_2(2t^2 - 1) + b_3(4t^3 - 3t) \quad (11)$$

比较对应系数,便可确定 $b_0 \dots b_3$ 等系数。

根据 G. L. Gladwell 和 Popov 等的研究^[3],当接触面位移用契贝谢夫多项式表出时,接触面的压力分布可以用封闭积分的形式,也用契贝谢夫多项式表示。当

$$w = -d + \sum_{n=0}^N b_n T_n(\zeta)$$

则接触应力

$$p(t) = (1-t^2)^{-1/2} \sum_{n=0}^N a_n T_n(t) \quad (11)$$

(11) 式中: $a_n = \vartheta^{-1} n b_n$, (11) 式可改写成:

$$(1-t^2)^{-1/2} p(t) = \sum_{n=0}^N a_n T_n(t) \quad (12)$$

显然,当 $t = 1, -1$ 时(12)式右边为零,(12)式改写成

$$(1-t^2)^{-1/2} p(t) = \sum_{n=0}^N a_n T_n(t) - \sum_{n=0}^N a_n T_n(1) = a_0 [T_0(t) - T_0(1)] + a_1 [T_1(t) - T_1(1)] + a_2 [T_2(t) - T_2(1)] + a_3 [T_3(t) - T_3(1)] = a_1(t-1) + 2a_2(t^2-1) + 4a_3 t(t^2-1)$$

$$p(t) = \vartheta^{-1} \left[(a_1 + a_3) \left(\frac{t-1}{t+1} \right)^{1/2} + 2a_2(t^2-t)^{1/2} + 4a_3 t(1-t^2)^{1/2} \right]$$

由总载荷等于 F , 确定 a, b 与 F 的关系。如忽略3次项,便重新回归赫兹应力公式。用本文的公式和结论,齿轮润滑力学、齿轮弹性流体动压润滑等许多结论和公式都可重新研究。故不赘述。

3 算例

例:以综合曲率半径为 R 的抛物线形底面的物体,其外形:

$$-\frac{y}{a} = \frac{x^2}{2aR} = \frac{at^2}{2R} = \frac{a(2t^2-1)}{4R} + \frac{a}{4R} = \frac{a}{4R} [T_0(t) + T_2(t)]$$

因此: $b_2 = -\frac{a}{4R}$, $p(t) = \frac{2P_0(1-t^2)^{1/2}}{a\pi}$, $P_0 = \frac{a^2\pi}{2R\epsilon}$,

$$a = \sqrt{\frac{2RP_0\epsilon}{\pi}}$$

与赫兹公式一样。 $p_{\max} = p(0) = \frac{2P_0}{a\pi} = \sqrt{\frac{2P_0}{R\pi\epsilon}}$

设一对齿轮 $d_1 = 70 \text{ mm}$, $d_2 = 230 \text{ mm}$, $b = 70 \text{ mm}$,

$i = 3.28$, 弹性系数 $\sqrt{\frac{1}{\pi\epsilon}} = 189.8/\text{MPa}$, 综合曲率半

径为 $R = \frac{d_1 i \sin \alpha}{2(i+1)} = 9.178 \text{ mm}$, 单位线长的载荷

$P_0 = 64.17 \text{ N/mm}$, 得最大接触应力 $p_{\max} = 499.75 \text{ N/mm}$, 而按 3 阶展开计算最大接触应力等于 529.74 N/mm , 增大应力 6% 左右。

4 结 论

齿轮接触应力的改进是多方面的, 本文的主要观点是: 齿面不应简单看成圆柱, 而应看成 3 阶抛物线, 这样可提高计算精度。本文的结果和方法可应用于其他方面。

参考文献:

- [1] 周立军. 齿轮接触应力研究综述[J]. 机械传动, 2004, (6): 1-5.
- [2] 孟惠荣. 齿轮强度计算的表面压力问题[J]. 中国矿业大学学报, 1980, (2): 12-14.
- [3] Lgradwell G M. 接触力学的经典理论[M]. 北京: 北京理工大学出版社, 1996.

“液体菌种在食用菌生产中的应用研究” 通过项目评审

2004 年 12 月 25 日, 杭州市科技局组织专家对浙江科技学院生物与化学工程学系活泼研究员(博士)主持, 蒋家新教授、黄光荣(在职博士)、韩省华(杭州华丹农产品有限公司总工)参加的“液体菌种在食用菌生产中的应用研究与示范”进行了项目评审。与会专家认真听取了课题组的汇报, 通过质疑、审阅评审材料, 一致认为该项研究达到国内领先水平。课题组研究开发的“增氧式液体菌种的生产及接种方式和装置”、“悬浮式液体菌种的生产及接种方式和装置”两项技术申报了中国国家专利。

生物与化学工程学系