浙江科技学院学报，第 17 卷第 2 期，2005 年 6 月
Journal of Zhejiang University of Science and Technology
Vol. 17 No. 2, June 2005

一类阶段结构捕食系统的全局渐近稳定性

张少林，薛有才
（浙江科技学院 理学院，浙江 杭州 310023）

摘　要：研究了一类食饵具有阶段结构捕食系统的一致持久性，并利用建立 Lyapunov 函数的方法得到了系统全局渐近稳定的充分条件。

关键词：捕食者与食饵系统；阶段结构；一致持久；全局渐近稳定
中图分类号：O175.5　　**文献标识码**：A　　**文章编号**：1671-8798(2005)02-0081-03

Global asymptotical stability of a predator-prey system with stage-structure for prey

ZHANG Shao-lin, XUE You-cai
(School of Science, Zhejiang University of Science and Technology, Hangzhou 310023, China)

Abstract: The uniform persistence in a predator-prey system with stage-structure for prey is studied. By means of Lyapunov function, a sufficient condition of global asymptotical stability is obtained.

Key words: predator-prey system; stage-structure; uniform persistence; global asymptotical stability

在自然界中，许多种群可分为幼体和成体两个阶段，而幼体种群常常是捕食者种群的食饵。而捕食者种群对资源的掠取，本身的密度制约可能有个滞后作用。因此，利用泛函微分方程描述的时滞生态系统受到广泛的重视。文献[1]得到阶段结构种群系统的持久性的条件，文献[2]研究了在斑块生境中具有连续时滞和扩散效应的捕食者与食饵的动力学行为，文献[4]讨论了一类捕食者种群具有阶段结构的捕食者与食饵系统的全局稳定性。本文研究食饵种群具有阶段结构，捕食者具有连续时滞，捕食者与食饵系统(1) 的一致持久性与全局渐近稳定性。这里 $x_1(t)$，$x_2(t)$ 为食饵种群 A 的幼年群体和成年群体的密度，$y(t)$ 为捕食者种群 B 的密度。假定系统(1) 的系数为

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = a(t)x_2(t) - b(t)x_1(t) - d(t)x_1^2(t) - \\ \qquad p(t)x_1(t)y(t), \\ \dot{x}_2(t) = c(t)x_1(t) - f(t)x_2^2(t), \\ \dot{y}(t) = y(t)[-g(t) + h(t)x_1 - e(t)y(t) - \\ \qquad q(t)\int_{-T}^{0} K(s)y(t+s)\mathrm{d}s] \end{cases} \tag{1}$$

连续的 ω 周期函数。这里 $t \geqslant 0$，并且 $a(t)$，$b(t)$，$c(t)$，$e(t)$，$f(t)$ 均为正，而 $p(t)$，$h(t)$，$q(t)$ 是非负的，函数 $K(t)$ 为非负核函数，且 $\int_{-T}^{0} K(s)\mathrm{d}s = 1$。

1　定义与引理

设 $x = (x_1(t), x_2(t), y(t)) \in R_+^3 = \{x \in R^3, x_1 \geqslant 0, x_2 \geqslant 0, y \geqslant 0\}$，基于生态意义，仅在 $\mathrm{int}R_+^3$ 中

收稿日期：2005-02-19
基金项目：浙江省教育厅科研基金资助项目(20038049)
作者简介：张少林(1961—)，男，副教授，硕士，主要从事微分动力系统研究。

考虑系统(1)的一致持久与全局渐近稳定性。

记$C^+ = C([-T,0];R^3_+)$是$[-T,0]$上所有非负连续向量函数组成的Banach空间,且

$$||\Phi|| = \sup_{s\in[-T,0]} |\Phi(s)|, \Phi \in C^+,$$

其中$|\cdot|$表示空间R^3中的模。当$f(x)$是一个定义在$[0,+\infty)$的连续的ω周期函数,记

$$A_\omega(f) = \omega^{-1}\int_0^\omega f(t)\mathrm{d}t,$$

$$f^m = \max_{t\geqslant 0} f(t), f^l = \min_{t\geqslant 0} f(t)。$$

假设系统(1)满足初始条件

$$\Phi \in C^+, \Phi(0) \in \mathrm{int}R^3_+ \tag{2}$$

引理1[1] 系统

$$\begin{cases}\dot{u}_1(t) = a(t)u_2(t) - b(t)u_1(t) - d(t)u_1^2(t),\\ \dot{u}_2(t) = c(t)u_1(t) - f(t)u_2^2(t),\end{cases}$$

存在一个正ω周期解,并且关于$\mathrm{int}R^3_+$是全局渐近稳定的。

引理2[3] 系统

$$\dot{u} = u(a(t) - b(t)u), \tag{3}$$

这里$a(t),b(t)$是ω周期函数。$b^l \geqslant 0$和$A_\omega(a(t)) > 0$,存在一个常数$M>0$,对系统(3)的任意一个正解有$u(t)$满足$\lim\limits_{t\to+\infty}\sup u(t) \leqslant M$。

引理3[5] (Barbalat's Lemma)设$f(t)$是定义在$[h,+\infty)$上的非负函数,其中h是非负实数,若f在$[h,+\infty)$可积,且一致连续,则$\lim\limits_{t\to+\infty} f(t) = 0$。

定义 系统(1)称为是一致持久的,若存在紧集$D \subset \mathrm{int}R^3_+$,使得系统(1)对满足初始条件(2)的解$x(t) = (x_1(t),x_2(t),y(t))$都将进入并停留在$D$中。

2 系统(1)的一致持久性

定理1 设$z(t) = (x_1(t),x_2(t),y(t))$是系统(1)满足初始条件(2)的任意一个正解。则存在正数$M_i(i=1,2)$,N和$T_0>0$使得当$t\geqslant T_0$时,有

$$x_i(t) \leqslant M_i(i=1,2), y(t) \leqslant N。$$

证明 对系统(1)的任意正解$(x_1(t),x_2(t),y(t))$有

$$\begin{cases}\dot{x}_1(t) \leqslant a(t)x_2(t) - b(t)x_1(t) - d(t)x_1^2(t),\\ \dot{x}_2(t) = c(t)x_1(t) - f(t)x_2^2(t)。\end{cases}$$

由引理1可知下面辅助系统

$$\begin{cases}\dot{u}_1(t) = a(t)u_2(t) - b(t)u_1(t) - d(t)u_1^2(t),\\ \dot{u}_2(t) = c(t)u_1(t) - f(t)u_2^2(t),\end{cases} \tag{4}$$

存在一个全局渐近稳定的正ω周期解$(u_1^*(t), u_2^*(t))$。设$(u_1(t),u_2(t))$是系统(4)满足$u_i(0) = x_i(0)(i=1,2)$的解,由比较原理[5]可知,当$t>0$时有 $x_i(t) \leqslant u_i(t)(i=1,2)$,

并且,存在一个$T_0>0$,当$t\geqslant T_0$时有

$$u_i(t) \leqslant M_i(i=1,2)。$$

因此,当$t\geqslant T_0$时有$x_i(t)\leqslant M_i(i=1,2)$。

另一方面,由系统(1)知道,存在$T_1 \geqslant T_0 > 0$,使得 $\dot{y}(t) \leqslant y(t)(h^m M_i - e^l y(t))$。

由引理2得存在一个$N>0$,使得$y(t)<N$。(证毕)

假定

(H_1) $A_\omega(\theta) > 0$,其中$\theta = h(t)\delta_1 - (g(t) + q(t)N)$。

定理2 若系统(1),满足条件(H_1),则存在正数$\delta_i < M_i(i=1,2)$,$\eta<N$使得$x_i(t)\geqslant\delta_i$,$y(t)\geqslant\eta$。

证明 当$t>T_1>T_0$时,有

$$\begin{cases}\dot{x}_1(t) \geqslant a(t)x_2(t) - b(t)x_1(t) - d(t)x_1^2(t) - \\ \qquad Np(t)x_1(t),\\ \dot{x}_2(t) = c(t)x_1(t) - f(t)x_2^2(t),\end{cases}$$

设$u = (u_1(t),u_2(t))$为辅助系统(5)

$$\begin{cases}\dot{u}_1(t) = a(t)u_2(t) - [b(t) - Np(t)]u_1(t) - d(t)u_1^2(t),\\ \dot{u}_2(t) = c(t)u_1(t) - f(t)u_2^2(t),\end{cases} \tag{5}$$

满足始条件$u(0) = x(0)$的解。因此,当$t\geqslant T_1$时有

$$x_i(t) \geqslant u_i(t) \quad i=1,2。$$

由引理1知系统(5)有一个正ω周期解$u^*(t) = (u_1^*(t),u_2^*(t))$是全局渐近稳定的,故存在正数$\delta_i < M_i(i=1,2)$和$T_1>T_0$时有

$$x_i(t) \geqslant \delta_i \quad i=1,2。$$

另一方面,

$$\dot{y}(t) \geqslant y(t)(-g(t) + h(x)\delta_1 - e(t)y(t) - q(t)N) = \\ y(t)((h(x))\delta_1 - g(t) - q(t)N) - e(t)y(t))。$$

由条件(H_1)和引理1得到下面Logistic方程

$$\dot{u}(t) = u(t)((h(t) - g(t) - q(t)N) - e(t)u(t)) \tag{6}$$

存在惟一的合局渐近稳定的正确$\tilde{u}(t) \in [\bar{\delta}, \bar{k}]$,其中$\bar{\delta} = \left(\dfrac{\theta}{e(t)}\right)^l$,$\bar{k} = \left(\dfrac{\theta}{e(t)}\right)^m$。设$u(t)$是系统(6)满足初始条件$u(0) = y(0)$的解,则由比较定理可知,$y(t) \geqslant u(t) > 0$。取$\varepsilon_0 = \dfrac{\bar{\delta}}{2}$,存在$T_2 = T(x_1(0), x_2(0), y(0))$,有$|u(t) - \tilde{u}(t)| < \varepsilon_0$

即 $y(t) \geqslant u(t) > \tilde{u}(t) - \varepsilon_0 \geqslant \dfrac{\bar{\delta}}{2} = \eta$。(证毕)

定理1和定理2证明了,如果条件(H_1)成立,则存在正数δ_i,$M_i(i=1,2)$,η和N使初值问题的解最终进入区域$\Omega = \{(x_1,x_2,y) | \delta_i \leqslant x_i \leqslant M_i, i=1,2;$

$\eta \leqslant y \leqslant N\}$。

3 系统(1)的全局渐近稳定性

假定 (H_2) $h^m + \frac{c^m}{\delta_1} < d^l; \frac{a^m}{\delta_2} < f^l; p^m + q^m < e^l$。

定理 3 如果系统(1)满足(H_1)和(H_2)，则系统的任意正解都是全局渐近稳定的。

证明 设 $x(t) = (x_1(t), x_2(t), y(t))$ 和 $u(t) = (u_1(t), u_2(t), v(t))$ 是系统(1)任意两个严格正确，由引理1与定理2知道，系统存在 $T_1 > 0$，使得一切 $t \geqslant T_1$ 有

$0 < \delta_i \leqslant x_i(t) \leqslant M_i (i = 1,2), 0 < \eta \leqslant y(t) \leqslant N;$
$0 < \delta_i \leqslant u_i(t) \leqslant M_i (i = 1,2), 0 < \eta \leqslant v(t) \leqslant N$。

令

$$U_i(t) = \ln u_i(t)(i = 1,2), V = \ln v(t),$$
$$X_i(t) = \ln x_i(t)(i = 1,2), Y = \ln y(t),$$

则

$$\dot{U}_1(t) - \dot{X}_1(t) = -d(x)(u_1(t) - x_1(t)) - p(t)(v(t)) - y(t)) + a(t)\left(\frac{u_2(t)}{u_1(t)} - \frac{x_2(t)}{x_1(t)}\right);$$

$$\dot{U}_2(t) - \dot{X}_2(t) = -f(x)(u_2(t) - x_2(t)) + c(t)\left(\frac{u_1(t)}{u_2(t)} - \frac{x_1(t)}{x_2(t)}\right);$$

$$\dot{V}_1 - \dot{Y}_1(t) = h(x)(u_1(t) - x_1(t)) - e(t)(v(t) - y(t)) - q(t)\int_{-T}^{0} K_2(s)(v(t+s) - y(t+s))\mathrm{d}s$$

令

$$a^*(t) = a(t)\left(\frac{u_2(t)}{u_1(t)} - \frac{x_2(t)}{x_1(t)}\right),$$
$$c^*(t) = c(t)\left(\frac{u_1(t)}{u_2(t)} - \frac{x_1(t)}{x_2(t)}\right)。$$

研究 $a^*(t)$ 的 3 种情况：

① $u_1(t) > x_1(t)$； ② $u_1(t) < x_1(t)$； ③ $u_1(t) = x_1(t)$。

容易证明 $a^*(t) \leqslant \frac{a^m}{\delta_1}|u_2(t) - x_2(t)|, c^*(t) \leqslant \frac{c^m}{\delta_2}|u_1(t) - x_1(t)|$。定义 Lyapunov 函数

$$W(t) = \sum_{i=1}^{2}|U_i(t) - X_i(t)| + |V(t) - Y(t)| + q^m\int_{-T}^{0} K(s)\int_{t+s}^{t}|v(v) - y(v)|\mathrm{d}v\mathrm{d}s。$$

下面计算并估计 $W(t)$ 沿着系统(1)解的右上导数

$$D^+ W(t) \leqslant \left(-d^l + h^m + \frac{c^m}{\delta_1}\right)|u_1(t) - x_1(t)| + \left(-f^l + \frac{a^m}{\delta_2}\right)|u_2(t) - x_2(t)| + (-e^l + p^m + q^m)|v(t) - y(t)|。$$

依据条件(H_2)，存在正数 $\beta > 0$ 使得

$$D^+ W(t) \leqslant -\beta\left(\sum_{i=1}^{2}|u_i(t) - x_i(t)| + |v(t) - y(t)|\right),$$

对上式两边积分得

$$W(t) + \beta\int_{T_1}^{t}\left(\sum_{i=1}^{2}|u_i(t) - x_i(t)| + |v(t) - y(t)|\right)\mathrm{d}s \leqslant W(T_1) < +\infty,$$

这里

$$\sum_{i=1}^{2}|u_i(t) - x_i(t)| + |v(t) - y(t)| \in L^1(T_1, +\infty)。$$

由定理1得 $|u_i(t) - x_i(t)| (i = 1,2)$；$|v(t) - y(t)|$ 及其导数在$[T_1, +\infty)$上有界，从而

$$\sum_{i=1}^{2}|u_i(t) - x_i(t)| + |v(t) - y(t)|$$

在$[T_1, +\infty)$一致连续。于是由引理 3 可得

$$\lim_{t\to+\infty}\left(\sum_{i=1}^{2}|u_i(t) - x_i(t)| + |v(t) - y(t)|\right) = 0$$

从而 $\lim_{t\to+\infty}|u_i(t) - x_i(t)| = 0 (i = 1,2)$，$\lim_{t\to+\infty}|v(t) - y(t)| = 0$，这表明系统(1)的任何正解都是稳定的和全局吸引的。(证毕)

参考文献：

[1] CUI Jin-an, CHEN Lan-sun, WANG Wen-di. The effect of dispersal on population growth with stage-sructure[J]. Compusers Math Applic, 2000,39:91—102.

[2] LIU Zhi-jun, WANG Wen-di. Persistence and periodic solutions of a nonautonomous predatorprey diffusion system with holling III functional response and continuous delay[J]. Discrete and Continuous Dynamical system(ser B), 2004,4(3):653—662.

[3] XIAO Yan-ni, CHEN Lan-sun. Global stability of a predator prey system with stage-structive for the predator[J]. Acta Mathematical sinic(English series), 2004,(20):63-70.

[4] ZHAO Xiao-qiang. The qualitative analysis of n-species Lotka-Volterra periodic competition system [J]. Math Comp Modeling, 1991,15:3—8.

[5] Gopalsamy K. Stability and oscillations in delay differential equations of population dynamics[M]. Dordrecnt: Kluwer Academic Publishers, 1992.

[6] Lakshmikantham V, Matrosov V M, Sivasundaram S. Vector Lyapunov functions and stability analysis of nonlinear systems[M]. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1991.