浙江科技学院学报,第17卷第3期,2005年9月
Journal of Zhejiang University of Science and Technology
Vol. 17 No. 3, Sep. 2005

有限生成半单分次模情形的群分次环

李小梅
(浙江科技学院 理学院,浙江 杭州 310023)

摘　要:对有限生成半单分次模情形下的 G-分次环进行了探讨。如果 $X=\bigoplus_{i\in F}X_i$,X_i 为单 G-分次 R-模,F 为一个有限集合,$\mathrm{Mod}(E(X))$表示 $E(X)$-模范畴,则 $X=\bigoplus_{i\in F,X_i\in S}X_i$ 为 $\mathrm{Mod}(R|X)$的有限生成投射生成子。而-$\otimes_{E(X)}X$ 与 $\mathrm{Hom}_R(X,-)$在 $\mathrm{Mod}(R|X)$限制下构成的 Abel 范畴 $\mathrm{Mod}(E(X))$及 $\mathrm{Mod}(R|X)$间的范畴为互逆范畴。

关键词:分次同态环;AbeL 范畴;投射生成子
中图分类号:O152.6　　**文献标识码**:A　　**文章编号**:1671-8798(2005)03-0161-03

Group-graded rings of half-simple modules with finitely generated modules

LI Xiao-mei
(School of Science, Zhejiang University of Science and Technology, Hangzhou 310023, China)

Abstract: This paper discussed the group-graded rings of half-simple modules with finitely generated modules. If $X=\bigoplus_{i\in F}X_i$, (X_i is G-graded modules, F is a finite set find)and Mod(E(X)) is E(X)-modules categories, then $X=\bigoplus_{i\in F,X_i\in S}X_i$ is the projective generators of Mod ($R|X$) and that -$\otimes_{E(X)}$ X and $\mathrm{Hom}_R(X,-)$ is reciprocal category when it is Abel categories of Mod ($R|X$).

Key words: graded homomorphism ring; Abel categories; projective generators

本文约定:G是一个群,R是一个有单位元的结合环,并设定R是一个G-分次环,即$R=\bigoplus_{g\in G}R_g$。R-模如无特别强调,一般总是指右R-模。当M_g为加法群,且满足$\forall g,h\in G,M_gR_h\subseteq M_{gh}$,$M=\bigoplus_{g\in G}M_g$时,称$R$-模$M$为$G$-分次模。

设M,N为分次R-模,记$\mathrm{Hom}_g(M,N)$为通常的R-模同态加群;$\mathrm{End}_g(M)$为通常的自同态环;$E(M)=H(M,N)$为M的分次自同态环;当$H(M,N)_g=\{\varphi\in\mathrm{Hom}_R(M,N)\mid\varphi(M_h)\subseteq N_{gh},\forall h\in G\}$和$H(M,N)=\bigoplus_{g\in G}H(M,N)_g$为加法群直和时,记$H(M,N)$为$\mathrm{Hom}_R(M,N)$的$G$-分次子群。

$\mathrm{Mod}(R)$表示右R-模范畴;$\mathrm{GrMod}(G,R)$表示G-分次右R-模范畴,简记$\mathrm{GrMod}(R)$;$\mathrm{Mod}(R\mid S)$表示由S生成的$\mathrm{Mod}(R)$满子范畴,其中S为$\mathrm{Mod}(R)$的非空子类,即其对象均为$\bigoplus_{z\in s}Z^{(I)}$的$R$-满同态象;当$\forall M\in\mathrm{GrMod}(R)$时,记$\mathrm{Supp}(M)=\{g\in G\mid M_B\neq 0\}$。

显然有[1,2]:

收稿日期:2005-04-06
作者简介:李小梅(1956—　),女,黑龙江宝清人,讲师,主要从事高等数学、代数的教学与研究。

(1) 当 M 是有限生成 R- 模，则 $H(M,N)=\mathrm{Hom}_R(M,N)$，$E(M)=\mathrm{End}_R(M)$。

(2) 若 Z 为单 G- 分次 R- 模，$g\in \mathrm{Supp}(Z)$，则 Z_g 必为单 R_e- 子模，其中 e 为群 G 的单位元。

本文分析了在单模情形下 G- 分次环中的一个性质，进而对有限生成半单分次模情形下的 G- 分次环进行讨论，得到了在有限生成半单分次模情形下 G- 分次环中的一个结论：

定理：设 $X=\bigoplus_{i\in F}X_i$，X_i 为单 G- 分次 R- 模，F 为一个有限集合。$\mathrm{Mod}(E(X))$ 表示 $E(X)$- 模范畴，则 $X=\bigoplus_{i\in F,X_i\in S}X_i$ 为 $\mathrm{Mod}(R\mid X)$ 的有限生成投射生成子。且 $-\otimes_{E(X)}$ 与 $\mathrm{Hom}_R(X,-)$ 在 $\mathrm{Mod}(R\mid X)$ 限制下构成的 Abel 范畴 $\mathrm{Mod}(E(X))$ 及 $\mathrm{Mod}(R\mid X)$ 间的范畴为互逆范畴。

1 准备知识

设 $S=\{Z\mid Z\in \mathrm{GrMod}(R), Z$ 为单分次模$\}$，$Z_i\in S$；$g\in \mathrm{Supp}(Z_i)$，$i\in I$；$M\in \mathrm{Mod}(R\mid S)$。则有[3~6]：

引理 1 若 $M\in \mathrm{Mod}(R\mid S)$，则 M 是半单 R_e- 模，且其任一单 R_e- 子模必同构于某 Z_g。

证明 因为 $M\in \mathrm{Mod}(R\mid S)$，故有 R- 满同态 ϕ：$\bigoplus_{i\in I}Z_i^{(I_i)}\to M\to 0$（$Z_i\in S$，且 $Z_i=\bigoplus_{g\in G}Z_{i,g}$，而 $Z_{i,g}$ 为 R_e- 模）。由此，$Z_i^{(I_i)}$ 为 $Z_{i,g}^{(I_i)}$ 的 R_e- 直和，所以，$\bigoplus_{i\in I}Z_i^{(I_i)}$ 必为 $Z_{i,g}^{(I_i)}$ 的 R_e- 直和。因此，M 是 $\phi(Z_{i,g})$ 的和，且 $Z_{i,g}$ 均是单 R_e- 模。故任一 $\phi(Z_{i,g})=0$ 或 $\phi(Z_{i,g})\cong Z_{i,g}$。[证毕]

引理 2 若 $M\in \mathrm{Mod}(R\mid S)$，$\forall Z_i\in S$ 和 $Z_i=\bigoplus_{g\in G}Z_{i,g}$，$R_e$- 同态 ϕ：$Z_{i,g}\to M$ 可唯一扩张成 R- 同态 ϕ^e：$Z_i\to M$。

证明 因为 $Z_{i,g}$ 生成了 R- 模 Z_i，所以只能有唯一 ϕ^e：$Z_i\to M$ 使其在 $Z_{i,g}$ 上的限制恰好为 ϕ。故只要证明 ϕ^e 的存在性。

设 $M\in \mathrm{Mod}(R\mid S)$，故有 R- 满同态 h：$\bigoplus_{i\in I}Z_i^{(I_i)}\to M$。由引理 1，$M$ 及 $\bigoplus_{i\in I}Z_i^{(I_j)}$ 均为 R_e- 半单的。因为 $Z_{i,g}$ 是 R_e- 单模，所以，必有 $\theta\in \mathrm{Hom}_{R_e}(Z_{i,g},\bigoplus_{k\in I}Z_k^{(I_k)})$ 使得 $h\theta=\phi$。从而若 θ 能扩张成 R- 同态 θ^e：$Z_i\to\bigoplus_{k\in I}Z_k^{(I_k)}$，则 ϕ 便能扩张成 R- 同态 $\phi^e=h\theta^e$：$Z_i\to M$。由此若 $M=\bigoplus_{k\in I}Z_k^{(I_k)}$，$Z_k\in S$，且设 $l_{k,j}$，$\pi_{k,j}$，$j\in I_j$，分别为 $M=\bigoplus_{i\in I}Z_i^{(I_i)}$ 通常的内射与投射，因为 ϕ：$Z_{i,g}\to \mathrm{M}=\bigoplus_{i\in I}Z_i^{I_i}$ 为 R_e- 同态，且 $Z_{i,g}$，M 分别为单和半单 R_e- 模，故可将 $Z_{i,g}$ 看为 M 的子模，再由直和的泛性质，得到下列分解：$\phi=\sum_{k,j}l_{k,j}\phi_{k,j}$（$\phi_{k,j}\in \mathrm{Hom}_{R_e}(Z_{i,g},Z_k)$）。这样只要每个 $\phi_{k,j}$ 能扩张成 R- 同态 $\phi^e_{k,j}$：$Z_i\to Z_k$，ϕ 就能扩张到 ϕ^e：$Z_i\to \mathrm{M}=\bigoplus_{i\in I}Z_i^{(I_i)}$。

由此假设 $\mathrm{M}=Z_k$，且 ϕ：$Z_{i,g}\to Z_k=\bigoplus_{x\in G}Z_{k,x}=\bigoplus_{h\in G}Z_{k,hg}$（$R_e$- 模直和）。考虑 ϕ 可以扩张为 ϕ^e：$Z_i\to Z_k$，同样可设 ϕ：$Z_{i,g}\to Z_{k,hg_g}$ 来考虑 ϕ 可以扩张为 ϕ^e：$Z_i\to Z_k$。

由函子：$-\otimes R$：$\mathrm{Mod}(R_e)\to\mathrm{GrMod}(R)$ 及交换图：

$$\begin{array}{ccc} Z_{i,g}\otimes R & \overset{\mu_g}{\leftrightarrow} & Z_i \\ \phi\otimes R\downarrow & & \downarrow\phi^e \\ Z_{k,hg}\otimes R & \underset{\mu_{hg}}{\leftrightarrow} & Z_k \end{array}$$

这里 μ_g，μ_{hg} 均为 R- 同构，ϕ^e 为所求的 R- 同态 ϕ 的扩张。由此命题得证。

引理 3 $\mathrm{Mod}(R\mid S)$ 的对象类关于 R- 子模，R- 商模，R- 模直和是闭的，故其为 $\mathrm{Mod}(R)$ 的 Abel 子范畴。

证明 对 R- 商模，R- 模直和显然是成立的。下证对 R- 子模也成立：

设 M' 为 $\mathrm{M}\in \mathrm{Mod}(R\mid S)$ 的任一 R- 子模，ϕ：$\bigoplus_i Z_i^{(I_i)}\to \mathrm{M}$ 为 R- 满同态，由引理 1 M' 的任一单 R_e- 子模形如 $\phi(Z_{i,g})\cong Z_{i,g}$，故由 $Z_i=Z_{i,j}R$ 且 ϕ 为 R- 满同态，就可以得到 $\phi(Z_i)=\phi(Z_{i,g})R\in M'$，从而 $M'=\bigoplus_{Z_{i,g}\in M'}\phi(Z_i)\in \mathrm{Mod}(R\mid S)$。[证毕]

2 结论证明

证明 设 $X=\bigoplus_{i\in F}X_i$，X_i 为单 G- 分次 R- 模，F 为一个有限集合，用 $\mathrm{Mod}(E(X))$ 表示 $E(X)$- 模范畴。将 S 中的元依 R- 同构分类，其代表元构成的类设为：

$S'=\{Z_i\mid Z_i$ 为 G- 分次 R- 模，$i\in F'\}$，则 $\mathrm{Mod}(R\mid S)=\mathrm{Mod}(R\mid S')$。

设 $\forall M,M'\in \mathrm{Mod}(R\mid S)$ 及其中的满态射：f：$M\to M'$，由引理 1 得 f 也是 $\mathrm{Mod}(R)$ 中的满态射。再设 R- 同态 ϕ：$\bigoplus_{i\in F'}Z_i\to M'$（这里 $Z_i=\bigoplus_{g\in G}Z_{i,g}$，$i\in F'$，对任意 $k\in F'$ 及其 $g\in \mathrm{Supp}(Z_k)$），由引理 2 知：$\exists h^e_{k,g}$ 使得 $f\exists h^e_{k,g}=\phi$。再由 $\bigoplus_{i\in F'}Z_i$ 的泛性质可从下列两个交换图

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{f} & M' \\ \exists h^e_{k,g}\uparrow & \nwarrow\exists h_{k,g} & \uparrow\phi \\ Z_k & \leftarrow & Z_{k,g} \end{array} \quad 和 \quad \begin{array}{ccc} M & = & M \\ h\uparrow & & \uparrow h^e_{k,g} \\ \bigoplus_{i\in F'}Z_i & \underset{l_k}{\leftarrow} & Z_k \end{array}$$

得到下面交换图:

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{f} & M' \\ h\uparrow & \nearrow_{\phi} & \\ \oplus_{i\in F'}Z_i & & \end{array}$$

这里,ϕ 是限制在 $Z_{k,g}$ 上,$h_{k,g}\in \mathrm{Hom}_{R_e}(Z_{k,g},M)$ 的存在性由 $Z_{k,g}$,M 分别为 R_e- 单,R_e- 半单及 f 为满同态得到。因此我们得到 $\oplus_{i\in F'}Z_i$ 在 $\mathrm{Mod}(R\mid S)$ 中的投射性,而其余结论显然。

即:$\oplus_{i\in F'}Z_i$ 为 $\mathrm{Mod}(R\mid S)$ 的投射生成子。当 F' 为有限集,则 $\oplus_{i\in F'}Z_i$ 就为 $\mathrm{Mod}(R\mid S)$ 的有限投射生成子。

由此有 $\mathrm{Mod}(R\mid S)=\mathrm{Mod}(R\mid \oplus_{Z_{i\in S}}Z_i)$,特别若 F 为有限集,则 $X=\oplus_{i\in F,X_i\in S}X_i$ 为 $\mathrm{Mod}(R\mid X)$ 的有限生成投射生成子,且 X 的分次自同态环 $E(X)=\mathrm{End}_R(X)$。

因此,对任意 $V\in \mathrm{Mod}(R\mid X)$,$V\otimes_{E(X)}X=\sum_{v\in V}v\otimes X$,其中 $v\otimes X$ 为 $V\otimes_{E(X)}X$ 的 R- 子模。并对任意固定的 $v\in V$,$X\mid\to v\otimes x(\forall x\in X)$,为 X 到 $v\otimes X$ 的 R- 满同态。用这些 R- 同态就诱导了 R- 满同态 $f:X^{(V)}=(\oplus_{i\in F}X_i)^{(V)}\cong\oplus_{i\in F}X^{(V)}\to V\otimes_{E(X)}X$。

故 $V\otimes_{E(X)}X\in \mathrm{Mod}(R\mid X)$,而 $-\otimes_{E(X)}X$ 确为 $\mathrm{Mod}(E(X))$ 到 $\mathrm{Mod}(R\mid X)$ 的函子,$\mathrm{Hom}_R(X,-)$ 自然就为 $\mathrm{Mod}(R)$ 到 $\mathrm{Mod}(E(X))$ 的函子。由于 $\mathrm{Mod}(R\mid S)=\mathrm{Mod}(R\mid\oplus_{Z_{i\in S}}Z_i)$,$X=\oplus_{i\in F,X_i\in S}X_i$ 为 $\mathrm{Mod}(R\mid X)$ 的有限生成投射生成子时,X 的分次自同态环 $E(X)=\mathrm{End}_R(X)$。因而

$\xi_X:X\to \mathrm{End}_R(X)\otimes_{\mathrm{End}_{R(X)}}X=E(X)\otimes_{E(X)}X$ 为 R- 同构,

$\eta_{E(X)}:E(X)=\mathrm{Hom}_R(X,X)\to \mathrm{Hom}_R(X,E(X)\otimes_{E(X)}X)$ 为 $E(X)$ 同构。

而又因 $X=\oplus_{i\in F}X_i$ 为有限生成投射 R- 模,函子 $-\otimes_{E(X)}X$ 和 $\mathrm{Hom}_R(X,-)$ 均保持直和,所以,当 $U=X^{(I)}$,$V=(X)^{(I)}$(I 为指标集)上述结论也成立。

一般地,$\forall U\in \mathrm{Mod}(R\mid X)$,$V\in \mathrm{Mod}(E(X))$

当 $X=\oplus_{i\in F}X_i$ 为 $\mathrm{Mod}(R\mid X)$ 的投射生成子时,$\mathrm{Hom}_R(X,-)$ 和 $-\otimes_{E(X)}X$ 均为右正合。故有 $X^{(I)}\to X^{(J)}\to U\to 0$。记 $P=\mathrm{Hom}_R(X,-)\otimes_{E(X)}X$,则有右正合列交换图:

$$\begin{array}{ccccccc} P(X^{(I)}) & \to & P(X^{(J)}) & \to & P(U) & \to & 0 \\ \downarrow \xi_{X^{(I)}} & & \downarrow \xi_{X^{(J)}} & & \downarrow \xi_U & & \\ X^{(I)} & \to & X^{(J)} & \to & U & \to & 0 \end{array}$$

由此 $\xi_{X^{(I)}}$,$\xi_{X^{(I)}}$ 均为同构,故 ξ_U 也同构。

对 V 考虑类似右正合列:

$E(X^{(I)})\to E(X^{(J)})\to V\to 0$

记 $P'=\mathrm{Hom}_R(X,-\otimes_{E(X)}X)$,右正合函子,则有下述 $\mathrm{Mod}(E(X))$ 中右正合交换图:

$$\begin{array}{ccccccc} P'(X^{(I)}) & \to & P'(X^{(J)}) & \to & P'(V) & \to & 0 \\ \downarrow \eta_{E(X)^{(I)}} & & \downarrow \eta_{E(X)^{(I)}} & & \downarrow \eta_V & & \\ E(X)^{(I)} & \to & E(X)^{(J)} & \to & V & \to & 0 \end{array}$$

因为 $\eta_{E(X)^{(I)}}$,$\eta_{E(X)^{(J)}}$ 均为同构,从而 η_V 也同构。所以有:$-\otimes_{E(X)}X$ 与 $\mathrm{Hom}_g(X,-)$ 在 $\mathrm{Mod}(R\mid X)$ 的限制构成 Abel 范畴 $\mathrm{Mod}(E(X))$ 及 $\mathrm{Mod}(R\mid X)$ 间的范畴等价。

至此,定理得证。

参考文献:

[1] Dade E C. Clifford theory for group-graded rings, Ⅱ[J]. J Reine anger Math ,1988,387:148－181.

[2] Nastasescu C, Van Oystaeyen F. Graded Ring Theory [M]. Amsterdan:North-holland,1982.

[3] Huang Z Y, Cheng F C. On homological dimensions of simple modules over non-commutative rings[J]. Comm in Algebra, 1996, 24(10): 3259－3264.

[4] 程福长,易　忠. 环的同调维数[M]. 桂林:广西师范大学出版社,1998. 1－230.

[5] Anderson F W,Fuller K R. Rings and Categories of Modules[M]. New York:Springer-Verlag,1974.

[6] Dade E C. Group-graded rings and modules[J]. Math Z, 1980,174:241－262.