浙江科技学院学报，第 17 卷第 3 期，2005 年 9 月
Journal of Zhejiang University of Science and Technology
Vol. 17 No. 3, Sep. 2005

多项分布与多元 Poisson 分布

胡　月
（浙江科技学院 理学院，浙江 杭州 310023）

摘　要：通过对多项分布与多元 Poisson 分布关系的研究，得到多元独立的非负整值随机变量 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 每一个服从 Poisson 分布的充分必要条件，并从另一个方面描述了二项分布与 Poisson 分布的内在关系。

关键词：二项分布；多项分布；多项 Poisson 分布；Poisson 分布
中图分类号：O212.2　　**文献标识码**：A　　**文章编号**：1671-8798(2005)03-0164-03

Multinomial distribution and multi-Poisson distribution

HU Yue
(School of Science, Zhejiang University of Science and Technology, Hangzhou 310023, China)

Abstract: Research on the relationship between multinomial distribution and multi-Poisson distribution, we got the sufficient and necessary condition of Poisson distribute obeyed for the non-negative multi-independent random variable $X_1, X_2, \cdots, X_n$. This paper gives a describtion for Poisson distribute from another aspect, explains the relationship between binomial distribution and Poisson distribution.

Key words: binomial distribution; multinomial distribution; multivariate Poisson distribution; Poisson distribution

通过对多项分布与多元 Poisson 分布关系的研究，得到多元独立的非负整值随机变量 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 每一个服从 Poisson 分布的充分必要条件；用另一方法推广 Chatterji[1] 只在 $i = 1, 2$ 时的特殊情况下讨论的结果。本文对我们熟知的 Poisson 分布的产生从另一个方面进行了描述，并说明了二项分布与 Poisson 分布的内在关系。

1　引　理

引理 1[2]　(1) 设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 相互独立，$S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$。若 $X_i \sim P(\lambda_i)$，其中参数 $\lambda_i > 0$，$i = 1, 2, \cdots, n$。$S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$。则 $S_n \sim P(\lambda)$，其中参数 $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n$。

(2) 设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 相互独立，$S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$。$S_n \sim P(\lambda)$，其中 $\lambda > 0$。则 $X_i \sim P(\lambda_i)(i = 1, 2, \cdots, n)$，其中参数 $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n$。

引理 2　若随机向量 $(\boldsymbol{X}_1, \boldsymbol{X}_2, \cdots, \boldsymbol{X}_n)$ 服从多项分布，则任意分量 $X_i (i = 1, 2, \cdots, n)$ 服从二项分布。

证明　设随机向量 $(\boldsymbol{X}_1, \boldsymbol{X}_2, \cdots, \boldsymbol{X}_n)$ 服从多项分布。

收稿日期：2005-03-01
作者简介：胡　月（1964—　），男，河南西峡人，副教授，理学硕士，主要从事概率论与数理统计和数学教育教学研究。

$$P\{X_1=k_1,X_2=k_2,\cdots,X_n=k_n\}=\begin{cases}\dfrac{k!}{k_1!k_2!\cdots k_n!}p_1^{k_1}p_2^{k_2}\cdots p_n^{k_n}, & \sum_{j=1}^{n}k_j=k,\\ 0, & \text{其他。}\end{cases}$$

其中,k_j 只取非负整数,$0<p_i<1$,$\sum_{i=1}^{n}p_i=1$。

随机向量$(\boldsymbol{X}_1,\boldsymbol{X}_2,\cdots,\boldsymbol{X}_n)$的特征函数[4]

$$\varphi(t_1,t_2,\cdots,t_n)=(p_1e^{it_1}+p_2e^{it_2}+\cdots+p_ne^{it_n})^k,$$

$t_1,t_2,\cdots,t_n\in R$。

易知$(\boldsymbol{X}_1,\boldsymbol{X}_2,\cdots,\boldsymbol{X}_n)$中第 i 个分量的 X_i 特征函数为

$$\varphi_n(t_i)=\varphi_n(0,0,\cdots,0,t_i,0,\cdots,0)=(p_1+p_2+\cdots+p_{i-1}+p_ie^{it_i}+p_{i+1}+p_n)^k$$

由于 $0<p_i<1$,$\sum_{i=1}^{n}p_i=1$,于是

$$\varphi(t_i)=[(1-p_i)+p_ie^{it_i}]^k\quad(i=1,2,\cdots,n)$$

很显然这是二项分布的特征函数,即 $X_i\sim B(k,p_i)$。

因此,随机向量$(\boldsymbol{X}_1,\boldsymbol{X}_2,\cdots,\boldsymbol{X}_n)$中的任何分量都服从二项分布。

2　主要结果及其应用

定理1　设随机变量 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 相互独立,且 $P\{X_j=k_j\}=f_i(k_j)>0,(k_j=0,1,2,\cdots)$,

$$\sum_{k_j=0}^{\infty}f_i(k_j)=1,(i=1,2,\cdots)。$$

则 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 中每一个都服从Poisson分布的充要条件是:对任意非负整数 k,在 $\sum_{j=1}^{n}X_j=k$ 条件下,向量$(\boldsymbol{X}_1,\boldsymbol{X}_2,\cdots,\boldsymbol{X}_n)$的条件分布是多项分布,即

$$P\{X_1=k_1,X_2=k_2,\cdots,X_n=k_n\mid\sum_{j=1}^{n}X_j=k\}=\begin{cases}\dfrac{k!}{k_1!k_2!\cdots k_n!}p_1^{k_1}p_2^{k_2}\cdots p_n^{k_n}, & \sum_{j=1}^{n}k_j=k;\\ 0, & \text{其他。}\end{cases}\quad(1)$$

其中,$0<p_i<1$,$\sum_{i=1}^{n}p_i=1$。

证明　必要性　若随机变量 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 相互独立,且 $X_i\sim P(\lambda_i)(i=1,2,\cdots)$,其中,参数 $\lambda_i>0,i=1,2,\cdots,n$。

即　$P(X_i=k_i)=\dfrac{\lambda_i^{k_j}}{k_j!}e^{-\lambda_i},k_j=0,1,2,\cdots;i=1,2,\cdots n$。

考察随机向量$(\boldsymbol{X}_1,\boldsymbol{X}_2,\cdots,\boldsymbol{X}_n)$,在 $\sum_{j=1}^{n}k_j=k$,$(\forall k\in N)$条件下的条件分布。

(1) 当 $\sum_{j=1}^{n}k_j=k$ 时,

$$P\{X_1=k_1,X_2=k_2,\cdots,X_n=k_n\mid\sum_{j=1}^{n}X_j=k\}=\frac{P(X_1=k_1,X_2=k_2,\cdots,X_n=k_n,\sum_{j=1}^{n}X_j=k)}{P(\sum_{j=1}^{n}X_j=k)}=\frac{P(X_1=k_1,X_2=k_2,\cdots,X_n=k_n)}{P(\sum_{j=1}^{n}X_j=k)}$$

已知 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 相互独立,及

$$P(X_i=k_i)=\frac{\lambda_i^{k_j}}{k_j!}e^{-\lambda_i},k_j=0,1,2,\cdots;i=1,2,\cdots,n。$$

有　$P(X_1=k_1,X_2=k_2,\cdots,X_n=k_n)=P(X_1=k_1)P(X_2=k_2)\cdots P(X_n=k_n)=\dfrac{\lambda_1^{k_1}\lambda_2^{k_2}\cdots\lambda_n^{k_n}}{k_1!k_2!\cdots k_n!}e^{-(\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n)}$

由引理1,由于 $X_i\sim P(\lambda_i)(i=1,2,\cdots,n)$,其中参数 $\lambda_i>0,i=1,2,\cdots,n$。且 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 相互独立,则　$\sum_{i=1}^{n}X_i\sim P(\lambda),(\lambda=\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n)$

即 $P(\sum_{j=1}^{n}X_j=k)=\dfrac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$,其中 $\sum_{j=1}^{n}k_j=k,\lambda=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i$。

由此可见,

$$P(X_1=k_1,X_2=k_2,\cdots,X_n=k_n\Big|\sum_{j=1}^{n}X_j=k)=\frac{k!}{k_1!k_2!\cdots k_n!}\left(\frac{\lambda_1}{\lambda}\right)^{k_1}\left(\frac{\lambda_2}{\lambda}\right)^{k_2}\cdots\left(\frac{\lambda_n}{\lambda}\right)^{k_n}=\frac{k!}{k_1!k_2!\cdots k_n!}p_1{}^{k_1}p_2{}^{k_2}\cdots p_n{}^{k_n}$$

其中,$p_i=\dfrac{\lambda_i}{\lambda},i=1,2,\cdots,n$。$0<p_i<1$,$\sum_{i=1}^{n}p_i=1$。

(2) 当 $\sum_{j=1}^{n}k_j\neq k$ 时,

易知 $P(X_1=k_1,X_2=k_2,\cdots,X_n=k_n\Big|\sum_{j=1}^{n}X_j=k)=0$。

因此,向量$(\boldsymbol{X}_1,\boldsymbol{X}_2,\cdots,\boldsymbol{X}_n)$在条件 $\sum_{j=1}^{n}X_j=k$ 下的条件分布为

$$P(X_1=k_1,X_2=k_2,\cdots,X_n=k_n\Big|\sum_{j=1}^{n}X_j=k)=\begin{cases}\dfrac{k!}{k_1!k_2!\cdots k_n!}p_1^{k_1}p_2^{k_2}\cdots p_n^{k_n}, & \sum_{j=1}^{n}k_j=k;\\ 0, & \text{其他;}\end{cases}$$

其中,$0<p_i<1$,$\sum_{i=1}^{n}p_i=1$。

充分性　如果在条件$\sum_{j=1}^{n}X_j = k(k=0,1,2,\cdots)$下，向量$(X_1,X_2,\cdots X_n)$的条件分布由式(1)给出。在条件$\sum_{j=1}^{n}X_j = k$下，向量$(X_1,X_2,\cdots,X_n)$中任何一个分量的$X_i(i=1,2,\cdots,n)$的条件分布必是二项分布

$$P(X_i = k_j \Big| \sum_{j=1}^{n}X_j = k) = C_k^{k_j} p_i^{k_j}(1-p_i)^{k-k_j} \quad (2)$$

下面，只需能证明任何一个分量$X_i \sim P(\lambda_i)$$(i=1,2,\cdots)$。对于非负整数$s \leqslant k$，记

$P(\sum_{j=1}^{n}X_j = s) = g(s) > 0$。且$\sum_{s=0}^{\infty}g(s) = 1$，若在式(2)中令$k_j = k$，

有$P(X_i = k \Big| \sum_{j=1}^{n}X_j = k) = p_i^k, i=1,2,\cdots,n$　(3)

此时有　$\sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n}X_j = 0, i=1,2,\cdots,n$。

显然，

$$\begin{aligned}P(X_i = k \Big| \sum_{j=1}^{n}X_j = k) &= P(X_i = k, \\ &\sum_{j=1}^{n}X_j = k)/P(\sum_{j=1}^{n}X_j = k) = \\ &P(X_i = k, \sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n}X_j = 0)/P(\sum_{j=1}^{n}X_j = k) = \\ &P(X_i = k)P(\sum_{\substack{j=1\\j\neq 1}}^{n}X_j = 0)/P(\sum_{j=1}^{n}X_j = k) = \\ &f_i(k)g(0)/P(\sum_{j=1}^{n}X_j = k)\end{aligned}$$

将式(3)代入上式，整理得

$$f_i(k) = p_i^k P(\sum_{j=1}^{n}X_j = k)/g(0) \quad (4)$$

类似地，再令$k_j = k-1$时，由式(2)有

$$P(X_i = k-1 \Big| \sum_{j=1}^{n}X_j) = k) = kp_i^{k-1}(1-p_i)$$

可得，

$$f_i(k-1) = kp_i^{k-1}(1-p_i)P(\sum_{j=1}^{n}X_j = k)/g(1) \quad (5)$$

由式(4)除以式(5)可得关于$f_i(k)$的递推公式

$$f_i(k) = \frac{g(1)p_i}{kg(0)(1-p_i)}f_i(k-1)。$$

利用迭代法便得

$$f_i(k) = \frac{1}{k!}\left[\frac{g(1)p_i}{g(0)(1-p_i)}\right]^k f_i(0) \quad (6)$$

显然，当$k=1$时，$\frac{f_i(1)}{f_i(0)} = \frac{g(1)p_i}{g(0)(1-p_i)}$

若记　$\lambda_i = \frac{f_i(1)}{f_i(0)}(i=1,2,\cdots,n)$，显然$\lambda_i > 0$

将λ_i代入式(6)得，$f_i(k) = \frac{1}{k!}\lambda_i{}^k f_i(0)$

由于$1 = \sum_{k=0}^{\infty}f_i(k) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\lambda_i^k f_i(0)$解得$f_i(0) = e^{-\lambda_i}$

因此，最后得到$f_i(k) = \frac{1}{k!}\lambda_i^k e^{-\lambda_i}, k=0,1,2,\cdots,\lambda_i > 0$

即　$P(X_i = k) = \frac{\lambda_i^k}{k!}e^{-\lambda_i}, k=0,1,2,\cdots,\lambda_i > 0$

所以，$(X_1,X_2,\cdots,X_n)$中的任何一个分量$X_i \sim P(\lambda_i)(i=1,2,\cdots,n)$

定理 2　设随机变量$X_1,X_2,\cdots,X_n$相互独立且只取非负整数，则$X_i \sim P(\lambda_i)(i=1,2,\cdots)$的充分必要条件是：在条件$\sum_{j=1}^{n}X_j = k,(k=0,1,2,\cdots)$下，各分量$X_i(i=1,2,\cdots,n)$的条件分布都是二项分布。

证明　必要性　如果$X_1,X_2,\cdots,X_n$相互独立且$X_i \sim P(\lambda_i)(i=1,2,\cdots,n)$。

由定理1知，在条件$\sum_{j=1}^{n}X_j = k(k=0,1,2,\cdots)$下，随机向量$(X_1,X_2,\cdots,X_n)$的条件分布都是多项分布，即

$$P(X_1 = k_1, X_2 = k_2, \cdots, X_n = k_n \Big| \sum_{j=1}^{n}X_j = k) = \begin{cases}\frac{k!}{k_1!k_2!\cdots k_n!}p_1^{k_1}p_2^{k_2}\cdots p_n^{k_n}, \sum_{j=1}^{n}k_j = k; \\ 0，其他。\end{cases}$$

其中，$0 < p_i < 1, \lambda = \sum_{j=1}^{n}\lambda_i, \sum_{i=1}^{n}p_i = 1$。

由引理2，在条件$\sum_{j=1}^{n}X_j = k$下，随机向量$(X_1,X_2,\cdots,X_n)$的各分量$X_i(i=1,2,\cdots,n)$的条件分布必是二项分布。

充分性　在条件$\sum_{j=1}^{n}X_j = k(k=0,1,2,\cdots)$下，随机向量$(X_1,X_2,\cdots,X_n)$的各分量$X_i(i=1,2,\cdots,n)$的条件分布都是二项分布。即

$$P(X_i = k_i \Big| \sum_{j=1}^{n}X_j = k) = \begin{cases}C_k^{k_j}p_i^{k_j}(1-p_i)^{k-k_j}, \sum_{j=1}^{n}k_j = k; \\ 0，其他。\end{cases}$$

其中，$0 < p_i < 1, \sum_{i=1}^{n}p_i = 1$。

类似定理1中关于充分性的证明过程，不难证明在此条件下，$(X_1,X_2,\cdots,X_n)$的每个分量$X_i(i=1,2,\cdots,n)$都服从 Poisson 分布。

（下转第 170 页）