浙江科技学院学报,第17卷第4期,2005年12月
Journal of Zhejiang University of Science and Technology
Vol. 17 No. 4, Dec. 2005

关于同调正则态射

钱有华,陈胜敏
(浙江师范大学 数理学院,浙江 金华 321004)

摘　要:利用同调函子,在点标拓扑空间范畴中定义了同调单态、同调满态、同调正则态射等概念。给出了同调正则态射的一些性质,以及它与同调单(满)态和同调等价之间的关系。

关键词:同调单态;同调满态;同调正则态射
中图分类号:O189.2　　**文献标识码**:A　　**文章编号**:1671-8798(2005)04-0241-03

On homology regular morphisms

QIAN You-hua, CHEN Sheng-min
(College of Mathematics and Physics, Zhejiang Normal University, Jinhua 321004, China)

Abstract: This paper defines homology monomorphism, homology epimorphism, homology regular morphism in the category of topological spaces with point by using homology functor. It also discusses some properties of homology regular morphism, and its close relationships to homology monomorphism (epimorphism) and homology equivalence.

Key words: homology monomorphism; homology epimorphism; homology regular morphism

广义逆是代数理论中的一个重要概念。文献[1,2]将广义逆的概念发展到范畴理论的函子上,得到了函子广义逆和群逆的一些结果。而文献[3]将广义逆的思想运用到了点标拓扑空间范畴,引进了同伦正则态射的概念,并利用文献[4]中提出的满单分解方法,研究了它存在的条件、性质以及与它与同伦单(满)态、同伦正则单(满)态和同伦等价之间的关系。

本文利用同调函子,在点标拓扑空间范畴中提出了同调单态、同调满态、同调正则态射等概念,并给出了同调正则态射的一些性质,以及它与同调单(满)态和同调等价之间的关系。本文一方面是代数广义逆理论在代数拓扑学中的推广,另一方面是同伦单、同伦满、同伦正则单、同伦正则满、覆叠同伦单、覆叠同伦满和覆叠同伦正则态射等概念的延伸。

1　预备知识

本文在点标拓扑空间范畴中讨论,同调指的是整系数的约化奇异同调论,用 $\widetilde{H}_n(X)$ 记空间 X 的 n 维约化奇异同调群(见文献[5,6])。设 $f: X\to Y$,则由 f 可导出 $\widetilde{f}_{n*}: \widetilde{H}_n(X)\to\widetilde{H}_n(Y)$。为方便起见,还

收稿日期:2004-10-18
基金项目:浙江师范大学青年基金资助项目(20042053)
作者简介:钱有华(1978—　),男,浙江建德人,硕士,助教,主要从事拓扑学的研究。

是用 f_{n*} 表示 $\widetilde{f}_{n*}$。

定义1[3] 设态射 $f:X\to Y$,若存在态射 $g:Y\to X$,使得 $fgf\simeq f$,则称 f 为同伦正则态射,g 称作 f 的一个同伦{1}-逆。

2 同调正则态射

同调单、同调满和同调正则态射等概念如下。

定义2 设 $f:X\to Y$,若对任意空间 W、任意 $n\in\mathbf{Z}$ 及 $g,h:W\to X$,且满足 $f_{n*}g_{n*}=f_{n*}h_{n*}$,都有 $g_{n*}=h_{n*}$,则称 f 为同调单态。

$$\widetilde{H}_n(W)\underset{h_{n*}}{\overset{g_{n*}}{\rightrightarrows}}\widetilde{H}_n(X)\xrightarrow{f_{n*}}\widetilde{H}_n(Y)$$

对偶地,有

定义3 设 $f:X\to Y$,若对任意空间 W、任意 $n\in\mathbf{Z}$ 及 $g,h:Y\to W$,且满足 $g_{n*}f_{n*}=h_{n*}f_{n*}$,都有 $g_{n*}=h_{n*}$,则称 f 为同调满态。

$$\widetilde{H}_n(X)\xrightarrow{f_{n*}}\widetilde{H}_n(Y)\underset{h_{n*}}{\overset{g_{n*}}{\rightrightarrows}}\widetilde{H}_n(W)$$

定义4 设 $f:X\to Y$,若存在 $g:Y\to X$,使得 $f_*g_*f_*=f_*$(即任意 $n\in\mathbf{Z}$,有 $f_{n*}g_{n*}f_{n*}=f_{n*}$),则称 f 为同调正则态射,g 称作 f 的一个同调{1}-逆,f 的所有同调{1}-逆记作 $f^H\{1\}$。

定义5 若 $f:X\to Y,g:Y\to X$,满足 $f_*g_*f_*=f_*$ 且 $g_*f_*g_*=g_*$,则称 g 为 f 的一个同调{1,2}-逆,f 的所有同调{1,2}-逆记作 $f^H\{1,2\}$。

命题1 若 f 为同伦正则态射,则 f 必为同调正则态射。

证 因 f 为同伦正则态射,故存在 $g:Y\to X$,使得 $fgf\simeq f$,于是 $(fgf)_*=f_*$,即 $f_*g_*f_*=f_*$,故 f 为同调正则态射。

命题2 若 f 为同调正则态射,则 f 不一定是同伦正则态射。

如由文献[3]知 Hop$f$ 纤维化映射 $f:S^3\to S^2$ 不是同伦正则态射。但由于 $\widetilde{H}_n(S^m)=\begin{cases}\mathbf{Z}, & n=m\\ 0, & n\neq m\end{cases}$,显然 f 为同调正则态射。同理,任意一个保基点的连续映射 $f:S^m\to S^n(n\neq m)$ 都是同调正则态射。由命题1和命题2知同调正则态射是同伦正则态射的真推广。

命题3 若 $f:X\to Y$ 有同调{1}-逆,则 f 必有同调{1,2}-逆。

证 设 $g:Y\to X$,使得 $f_*g_*f_*=f_*$,令 $h=gfg$,则 h 是 Y 到 X 的态射,且有

$$f_*h_*f_*=f_*g_*f_*g_*f_*=f_*g_*f_*=f_*,$$
$$h_*f_*h_*=g_*f_*g_*f_*g_*f_*g_*=g_*f_*g_*f_*g_*=g_*f_*g_*=h_*。$$

故 f 有同调{1,2}-逆。

定义6 设 $f:X\to Y$,若存在拓扑空间 Z、同调满态 $g:X\to Z$、同调单态 $h:Z\to Y$,使得 $f_*=h_*g_*$,则称 f 有同调标准分解,记作 (g,Z,h)。

定义7 设 $f:X\to Y$,若存在 $g:Y\to X$,使得 $f_*g_*=1,g_*f_*=1$,则称 f 为同调等价,g 称作 f 的一个同调逆。

定理1 设 $f:X\to Y$,则以下条件等价:

(1) f 是同调正则态射;

(2) f 有同调右单位,以及同调左逆元;即存在 $g:X\to X,h:Y\to X$,有 $f_*g_*=f_*,h_*f_*=g_*$;

(3) f 有同调左单位,以及同调右逆元;即存在 $\varphi:Y\to Y,\psi:Y\to X$,有 $\varphi_*f_*=f_*,f_*\psi_*=\varphi_*$。

证 只需证(1)⇔(2),类似可证(1)⇔(3)。

(1)⇒(2) 若 f 是同调正则态射,则有 $\sigma:Y\to X$,使得 $f_*\sigma_*f_*=f_*$,取 $g=\sigma f$,则 $f_*g_*=f_*$,取 $h=\sigma$,则 $\sigma_*f_*=g_*$。

(2)⇒(1) 由(2)知 $f_*h_*f_*=f_*g_*=f_*$,故 f 是同调正则态射。

定理2 设 $f:X\to Y$ 有同调标准分解 (g,Z,h),则以下条件彼此等价:

(1) f 是同调正则态射;

(2) 存在 $\sigma:Y\to X$,使得 $g_*\sigma_*h_*=1$;

(3) 存在 A、B 和 $i:A\to X,p:Y\to B$,使得 gi 和 ph 均为同调等价;

(4) g 为同调右可逆的,h 为同调左可逆的。

证 (1)⇒(2) 若 f 是同调正则态射,则有 $\sigma:Y\to X$,使得 $f_*\sigma_*f_*=f_*$,即 $h_*g_*\sigma_*h_*g_*=h_*g_*$,因 h 为同调单态,g 为同调满态,故 $g_*\sigma_*h_*=1$。

(2)⇒(3) 若存在 $\sigma:Y\to X$,使得 $g_*\sigma_*h_*=1$,取 $A=Z,B=Z,i=\sigma h,p=g\sigma$,则有 $(gi)_*=g_*i_*=g_*\sigma_*h_*=1,(ph)_*=p_*h_*=g_*\sigma_*h_*=1$,故 gi 和 ph 均为同调等价。

(3)⇒(4) 设有 A、B 及 $i:A\to X,p:Y\to B$,使得 gi 和 ph 均为同调等价,并设 u、v 分别为 gi 和 ph 的一个同调逆,则由 $1=(gi)_*u_*=g_*i_*u_*=g_*(iu)_*$ 知 g 为同调右可逆的。同理,h 为同调左可逆的。

(4)⇒(1) 设 g 为同调右可逆的,h 为同调左

可逆的,则存在 $g_1: Z\to X$,使得 $g_* g_{1*}=1$,存在 $g_2: Y\to Z$,使得 $g_{2*}h_*=1$,取 $g=g_1g_2$,则有

$$f_* g_* f_* = f_* g_{1*} g_{2*} f_* =$$
$$h_* g_* g_{1*} g_{2*} h_* g_* = h_* g_* = f_*。$$

故 f 是同调正则态射。

f 的同调标准分解 (g,Z,h) 被称为基本唯一的是指:若还存在 f 的另一组同调标准分解 (g',Z',h'),则有同调等价 $v: Z\to Z'$,使得 $v_* g_* = g'_*$,$h'_* v_* = h_*$。

定理 3　设 $f: X\to Y$ 为同调正则态射,若 f 有同调标准分解,则 f 的同调标准分解基本唯一。

证　设 (f_1,Z,f_2) 为 f 的同调标准分解,假设 (g_1,W,g_2) 为 f 的另一组同调标准分解。由**定理 2** 知,f_1 为同调右可逆的,f_2 为同调左逆的。设 $f'_1: Z\to X$,使得 $f_{1*}f'_{1*}=1$,设 $f'_2: Y\to Z$,使得 $f'_{2*}f_{2*}=1$。

令 $u=g_1f'_1: Z\to W$,$v=f'_2g_2: W\to Z$,则有 $(vu)_*=v_*u_*=f'_{2*}g_{2*}g_{1*}f'_{1*}=f'_{2*}f_*f'_{1*}=f'_{2*}f_{2*}f_{1*}f'_{1*}=1\circ 1=1$,即 $(vu)_*=1$。$g_{2*}(uv)_*g_{1*}=g_{2*}g_{1*}f'_{1*}f'_{2*}g_{2*}g_{1*}=f_{2*}f_{1*}f'_{1*}f'_{2*}f_{2*}f_{1*}=f_{2*}f_{1*}=g_{2*}g_{1*}=g_{2*}g_{1*}$。由于 g_2 为同调单态射,g_1 为同调满态射,故 $(uv)_*=1$。于是,u 是同调等价。

又 $g_{2*}u_*f_{1*}=g_{2*}g_{1*}f'_{1*}f_{1*}=f_{2*}f_{1*}f'_{1*}f_{1*}=f_{2*}f_{1*}=g_{2*}g_{1*}$,由 g_2 为同调单态射,左消去 g_2 得 $u_*f_{1*}=g_{1*}$。同理,由 $g_{2*}u_*f_{1*}=f_{2*}f_{1*}$ 及 f_1 为同调满态射得 $g_{2*}u_*=f_{2*}$。从而 f 的同调标准分解基本唯一。

定理 4　设 $f: X\to Y$ 有同调标准分解 (f_1,Z,f_2),则 f 为同调正则态射当且仅当 f_1,f_2 均为同调正则态射。

证　(必要性)设 f 为同调正则态射,并设 $g\in f^H\{1\}$,则 $f_*g_*f_*=f_*$,即 $f_{2*}f_{1*}g_*f_{2*}f_{1*}=f_{2*}f_{1*}$,由 f_2 为同调单态射,从而左消去 f_{2*} 得 $f_{1*}(gf_2)_*f_{1*}=f_{1*}$。由 f_1 为同调满态射,从而右消去 f_{1*} 得 $f_{2*}(f_1g)_*f_{2*}=f_{2*}$。故 f_1,f_2 均为同调正则态射。

(充分性)若 f_1,f_2 均为同调正则态射,设 $g_1\in f_1^H\{1\}$,$g_2\in f_2^H\{1\}$,即 $f_{1*}g_{1*}f_{1*}=f_{1*}$,$f_{2*}g_{2*}f_{2*}=f_{2*}$,由 f_1 为同调单态,f_2 为同调满态知 $f_{1*}g_{1*}=1$,$g_{2*}f_{2*}=1$。令 $g=g_1g_2$,则 $f_*g_*f_*=f_{2*}f_{1*}g_{1*}g_{2*}f_{2*}f_{1*}=f_{2*}f_{1*}=f_*$。从而 f 为同调正则态射。

根据定义很容易得到

定理 5　设 $f: X\to Y$,则

(1) f 为同调正则态射且为同调单态当且仅当 f 是同调左可逆的;

(2) f 为同调正则态射且为同调满态当且仅当 f 是同调右可逆的;

(3) f 为同调正则态射且 f 既是同调单态又是同调满态当且仅当 f 是同调等价。

另外,我们还可以得到下面的命题

命题 4　设 $f: X\to Y$ 为同调正则态射,若 $g\simeq mfn$。其中 $m、n\in f^H\{1\}$,则 $g\in f^H\{1\}$,且 g 为同调正则态射。

证　由 $f_*g_*f_*=(f_*m_*f_*)n_*f_*=f_*n_*f_*=f_*$ 知,$g\in f^H\{1\}$。又由 $g_*f_*g_*=m_*(f_*n_*f_*)m_*f_*n_*=m_*(f_*m_*f_*)n_*=m_*f_*n_*=g_*$ 知 g 为同调正则态射。

命题 5　设 $f: X\to Y$,$k: Y\simeq Z$(或 $h: Z\simeq X$),则 f 为同调正则态射当且仅当 kf(或 fh)为同调正则态射。

命题 6　设 $f: Z\to W$,$g: X\to Y$ 均为同调正则态射,其中 $f_1\in f^H\{1\}$,$g_1\in g^H\{1\}$,$h: X\to W$,则存在 $x: Y\to Z$ 使得 $f_*x_*g_*=h_*$ 当且仅当 $f_*f_{1*}h_*g_{1*}g_*=h_*$。

证　(充分性)取 $x=f_1hg_1$ 即可。

(必要性)由 $h_*=f_*x_*g_*=(f_*f_{1*}f_*)x_*(g_*g_{1*}g_*)=f_*f_{1*}(f_*x_*g_*)g_{1*}g_*f_*f_{1*}h_*g_{1*}g_*$,即得 $f_*f_{1*}h_*g_{1*}g_*=h_*$。

参考文献:

[1] 冯良贵. 函子的广义逆[J]. 数学学报,1996,39(1):16-23.

[2] 刘晓冀. 函子的群逆[J]. 铁道师范学院学报,1998,15(4):4-6.

[3] 曹永知,郭驼英,朱　萍. 关于同伦正则态射[J]. 数学物理学报,2000,20(2):274-277.

[4] 冯良贵. 因式分解范畴[J]. 数学研究与评论,1996,16(2):281-284.

[5] Spanier E H. Algebraic Topology[M]. New York:Spinger-Verlag,1966.

[6] 沈信耀. 同调论[M]. 北京:科学出版社,2002.