浙江科技学院学报,第 17 卷第 4 期,2005 年 12 月
Journal of Zhejiang University of Science and Technology
Vol. 17 No. 4, Dec. 2005

超对称势作用下束缚态体系能量本征值的代数解法

王长荣
(浙江科技学院 理学院, 浙江 杭州 310023)

摘　要: 借助于超对称及其配偶势的概念,用代数方法求解了形状不变势作用下束缚态体系的能量本征值及相关波函数,并以氢原子等典型问题为例进行了具体讨论。

关键词:超对称;配偶势;形状不变势;本征值;代数解法

中图分类号: O413.1　　**文献标识码**: A　　**文章编号**: 1671-8798(2005)04-0244-04

Algebraic approach to eigenvalue of energy of bound states system under supersymmetric potential

WANG Chang-rong
(School of Science, Zhejiang University of Science and Technology, Hangzhou 310023, China)

Abstract: With the aid of the concepts of the supersymmetric potential and the spouse potential, we use algebraic method to solve the eigenvalue of energy of bound states system and its concerned wave function which under the constant form potential. Furthermore, we have a specific argument that take hydrogen atom as a typical example.

Key words: supersymmetric; spouse potential; constant form potential; eigenvalues; algebraic approach

以一维谐振子为代表的能量本征值的代数解法,是量子力学中处理许多问题的基础[1]。近年来,代数方法(包括群及群表示理论)越来越多地应用到物理学前沿研究中,用来处理本征值问题[2,3]。本文借助于超对称和形状不变势的概念,用代数方法求解形状不变势作用下束缚态体系的能量本征值及相关波函数。

1　超对称势情况

代数方法在超对称量子力学中得到了进一步发展。理论证明,对于存在束缚态的一维势阱 $V(x)$,只要基态能量 E_0 有限,$\Psi'_0(x)$ 存在,就可以定义相应的升降算符,并对力学量进行因式分解[4]。取可解势,其哈密顿算符为:

收稿日期: 2005-09-20
基金项目: 浙江省自然科学基金资助项目(Y605359);浙江省科学哲学基金重点资助项目(05Z20)

作者简介: 王长荣(1953—　),男,湖北鹤峰人,教授,主要从事量子理论及大学物理课程与教学论的教学与研究。

$$\hat{H} = -\frac{\eta^2}{2\mu}\frac{d^2}{dx^2} + V(x) \quad (1)$$

设其基态能量值为 E_0，基态波函数为 Ψ_0，则有

$$\hat{H}_-\Psi_0 = 0 \quad (2)$$

其中 $$\hat{H}_- = -\frac{\eta^2}{2\mu}\frac{d^2}{dx^2} + V_-(x) \quad (3)$$

$$V_-(x) = V(x) - E_0 \quad (4)$$

由(2)(3)(4) 式，得到：

$$V_-(x) = \frac{\eta^2}{2\mu}\frac{\Psi''_0}{\Psi_0} \quad (5)$$

(5) 式中 $$\Psi''_0 = \frac{d^2\Psi_0}{dx^2}$$

令 $$\hat{a}^+ = -\frac{\eta}{\sqrt{2\mu}}\frac{d}{dx} + W(x) \quad (6)$$

$$\hat{a} = \frac{\eta}{\sqrt{2\mu}}\frac{d}{dx} + W(x) \quad (7)$$

(6)(7) 式中 $W(x)$ 为超势，可用基态波函数 $\Psi_0(x)$ 表示[5]

$$W(x) = -\frac{\eta}{\sqrt{2\mu}}\frac{\Psi'_0}{\Psi_0} = -\frac{\eta}{\sqrt{2\mu}}\frac{d}{dx}(\ln\Psi_0) \quad (8)$$

反过来， $$\Psi_0 = \exp\left\{-\frac{\sqrt{2\mu}}{\eta}\int_0^x W(x)dx\right\} \quad (9)$$

由(5) 式，可将(3) 式变换为

$$\hat{H}_- = \hat{a}^+\hat{a} \quad (10)$$

显然，Ψ_0 满足 $\hat{a}\Psi_0 = 0$。即 $\hat{a}$ 具有降算符的性质，对于任意一个波函数 $\varphi(x)$，有

$$\hat{a}\varphi(x) = -\frac{\eta}{\sqrt{2\mu}}\Psi_0\frac{d}{dx}(\varphi(x)/\Psi_0) \quad (11a)$$

或 $$\hat{a}\varphi(x) = -\frac{\eta}{\sqrt{2\mu}}\frac{1}{\Psi_0}\frac{d}{dx}(\Psi_0\varphi(x)) \quad (11b)$$

对应于(3) 式，同理，有

$$\hat{H}_+ = \hat{a}\hat{a}^+ = \frac{\eta^2}{2\mu}\frac{d^2}{dx^2} + V_+(x) \quad (12)$$

这里 $$V_+(x) = V_-(x) - \frac{\eta^2}{\mu}\frac{d}{dx}(\Psi'_0/\Psi_0) \quad (13)$$

$V_+(x)$ 和 $V_-(x)$ 被称为超对称配偶势，相应哈密顿算符被称为超对称哈密顿算符 H_s[6]，显见

$$V_\pm(x) = W^2(x) \pm W'(x) \quad (14)$$

定义超对称矩阵 $\boldsymbol{q}$ 和 $\boldsymbol{q}^+$[7]

$$\boldsymbol{q} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \hat{a} & 0 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{q}^+ = \begin{pmatrix} 0 & \hat{a}^+ \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

则有超对称哈密顿算符：

$$H_s = \{\boldsymbol{q}, \boldsymbol{q}^+\} = \begin{pmatrix} \hat{H}_- & 0 \\ 0 & \hat{H}_+ \end{pmatrix} \quad (15)$$

并且存在对易关系：

$$[H_s, \quad \boldsymbol{q}] = [H_s, \quad \boldsymbol{q}^+] = 0 \quad (16)$$

取 $\boldsymbol{q}$ 矩阵的基为 $(x_n^{(1)}, x_n^{(2)})$，

$$x_n^{(1)} = \begin{pmatrix} |1\rangle_n \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$x_n^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ |2\rangle_n \end{pmatrix} \quad (17)$$

其中 $|i\rangle_n = \Psi_n^{(i)}$ 为 $\hat{H}_i$ 的本征函数，设 $E_n^{(i)}$ 为相应的本征值，则有

$$\hat{H}_i x_n^{(i)} = E_n^{(i)} x^{(i)} \qquad i = 1,2 \quad (18)$$

即相应地 $\hat{H}_i = \hat{H}, \hat{H}_2 = \hat{H}_+; E_n^{(1)} = E_n^{(-)}$，$E_n^{(2)} = E_n^{(+)}; n = i-1, i, i+1\cdots$

由对易关系(16) 式的前后两个关系式分别得到：

$$\hat{H}_+(a\Psi_n^{(-)}) = E_n^{(-)}(a\Psi_n^{(-)}) \quad (19)$$

$$\hat{H}_-(\hat{a}^+\Psi_n^{(+)}) = E_n^{(+)}(a\Psi_n^{(+)}) \quad (20)$$

近似到 η 的一阶超对称 WKB 量子化条件[8]，除了 $E_0^{(-)}$ 以外，$\hat{H}_+$ 与 $\hat{H}_-$ 有相同的束缚态能谱。

$$E_{n+1}^{(-)} = E_n^{(+)} \qquad (n = 0,1,2,\cdots) \quad (21)$$

结合(19)(20) 式得到：

$$\Psi_n^{(+)} = (E_{n+1}^{(-)})^{\frac{1}{2}}\hat{a}\Psi_{n+1}^{(-)} \quad (22)$$

及 $$\Psi_{n+1}^{(-)} = (E_n^{+})^{\frac{1}{2}}\hat{a}\Psi_n^{(+)} \quad (23)$$

(21)(22)(23) 式表明：由(6)(7) 二式定义的 $\hat{a}$ 和 $\hat{a}^+$ 把配偶哈密顿算符 $\hat{H}_+$ $\hat{H}_-$ 具有相同能级的态联系起来了，与一维谐振子代数解法中的升、降算符具有相同的意义，区别在于此处是对同一能级的联系，而一维谐振子代数解法中升、降算符给出的是对不同能级的态之间的联系。

2　应用举例

2.1　形状不变势

一般地，如果 $V_-(x,\lambda_0)$ 是一个任意势，它的配偶势 $V_+(x,\lambda_0)$ 满足条件

$$V_+(x,\lambda_0) = V_-(x,\lambda_0) + R(\lambda_1),$$

式中 λ_0 是一组任意参量，λ_1 是 λ_0 的函数，$\lambda_1 = f(\lambda_0)$，余数 $R(\lambda_1)$ 是与 x 无关的常数，则称 $V_+(x,\lambda_0)$ 与 $V_-(x,\lambda)$ 是一对形状不变势[9]。它们是两个形

状相似，仅参量不同的势。

对于(13)式

$$V_+(x) = V_-(x) - \frac{\eta^2}{\mu}\frac{d}{dx}\left(\frac{\Psi'_0}{\Psi_0}\right),$$

可改写成

$$V_+(x) - V_-(x) = -\frac{\eta^2}{\mu}\frac{d}{dx}\left(\frac{\Psi'_0}{\Psi_0}\right)。$$

对于线性谐振子，上式右侧等于常数 $\eta\omega$，故 $V_+(x)$ 与 $V_-(x)$ 是一对形状不变势，而对于一维无限深势阱中的粒子，上式右方等于 $\frac{h^2}{4\mu L^2}\sin^{-2}\left(\frac{\pi x}{L}\right)$，即有

$$V_+(x) = \frac{h^2}{8\mu L^2}\left[2\sin^{-2}\left(\frac{\pi x}{L}\right) - 1\right] \quad (24)$$

及 $$V_-(x) = V(x) - \frac{h^2}{8\mu L^2} \quad (25)$$

显见旧势 $V_+(x)$ 与新势 $V_-(x)$ 形状不同，所以它们不是一对形状不变势。

对于形状不变势，如有哈密顿算符

$$\hat{H} = -\frac{\eta^2}{2\mu}\nabla^2 + V(x) \quad (26)$$

按(6)(7)二式，(26)式可分解成为：

$$\hat{H} = \hat{a}^+\hat{a} + \varepsilon_0 = \hat{H}_- + \varepsilon_0 \quad (27)$$

并从 $\hat{H}^{(1)} = \hat{H}_-^{(1)} + \varepsilon_0$ 出发，利用生成配偶势的方法和关系式(21)式，可以构造出一系列哈密顿算符 $\hat{H}^{(S)}, (s = 1, 2, \cdots)$，即有：

$$\begin{aligned}\hat{H}^{(2)} &= \hat{H}_+^{(1)} + \varepsilon_0^{(1)} = \hat{H}_-^{(2)} + \varepsilon_1^{(1)} \\ \hat{H}^{(3)} &= \hat{H}_+^{(2)} + \varepsilon_1^{(2)} = \hat{H}_-^{(3)} + \varepsilon_2^{(2)}\end{aligned} \quad (28)$$

……

$\hat{H}^{(n)} = \hat{H}_+^{(n-1)} + \varepsilon_{n-2}^{(n-1)} = \hat{H}_-^{(n)} + \varepsilon_{n-1}^{(n-1)}$ 其中：

……

$$\begin{aligned}\hat{H}_+^{(n)} &= -\frac{\eta^2}{2\mu}\frac{d^2}{dx^2} + V(x,\lambda_{n-1}) \\ \hat{H}_-^{(n)} &= -\frac{\eta^2}{2\mu}\frac{d^2}{dx^2} + V_-(x,\lambda_n)\end{aligned} \quad (29)$$

对上述所有哈密顿算符，有相同的束缚态能级，若 $n+1$ 是 $\hat{H}^{(1)}$ 的束缚态数目，即有：

$$\varepsilon_n = \varepsilon_n^{(1)} = \varepsilon_n^{(2)} = \cdots = \varepsilon_n^{(n+1)} \quad (30)$$

由(28)(29)(30)式得到

$$R(\lambda_i) = V_+(x,\lambda_{i-1}) - V_-(x,\lambda_i) = \varepsilon_{i-1} - \varepsilon_{i-2} \quad (31)$$

(31)式表明，余项 $R(\lambda_i)$ 代表第 $i-1$ 个能级与 $i-2$ 个能级之差，即 $\hat{H}^{(i)}$ 的基态与 $\hat{H}^{(i-1)}$ 的基态能级之差，因此 $\sum_{k=1}^{n} R(\lambda_k)$ 代表了 $\hat{H}^{(n)}$ 的基态能级 ε_{n-1} 与 $\hat{H}^{(1)}$ 的基态能级 ε_0 之差，即：

$$\begin{aligned}E_n^{(-)} &= \sum_{k=1}^{n} R(\lambda_k) \\ E_0^{(-)} &= 0\end{aligned} \quad (32)$$

2.2 线性谐振子

若利用熟悉的谐振子形式表示的升算符 $\hat{a}^+$ 和本征函数 $\Psi_n(\xi)$，即利用 $\Psi_0 = \Psi_0^{(-)}(x,\lambda_0)$ 表达 $\hat{a}^+(x,\lambda_0)$，则可将波函数简洁而方便地表示成为

$$\Psi_{n+1}^{(-)}(x,\lambda_0) \propto \frac{1}{\Psi_0}\frac{d}{dx}\left[\Psi_0\Psi_n^{(-)}(x,\lambda_1)\right] \quad (33)$$

而对于谐振子本身而言，则有：

$$\lambda_0 = \lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = \omega,$$

所有 $\hat{H}^{(0)}, \hat{H}^{(1)}, \hat{H}^{(2)} \cdots \hat{H}^{(n)}$ 的基态波函数都相同。

2.3 氢原子

而对于氢原子，其有效库仑势[10]

$$V(r) = -\frac{e^2}{r} + \frac{l(l+1)\eta^2}{2\mu r^2} \quad (34)$$

所以

$$V_-(r) = V(r) - E_0 = -\frac{e^2}{r} + \frac{l(l+1)\eta^2}{2\mu r^2} - E_0 \quad (35)$$

选 $$W(r) = a + \frac{\beta\eta}{r\sqrt{2\mu}} \quad (36)$$

由(14)式 $V_-(x) = W^2(x) + W'(x)$

将(35)(36)式代入，比较同次幂系数，有：

$$\begin{cases} a^2 = -E_0 \\ a = -\frac{e^2\sqrt{2\mu}}{2\beta\eta} \\ \beta = \begin{cases} l \\ -(l+1) \end{cases} \end{cases}$$

取 $$\beta = l, W(r) = \frac{-e^2\sqrt{2\mu}}{2l\eta} + \frac{l\eta}{r\sqrt{2\mu}} \quad (37)$$

将(37)式代入(9)式，得到：

$$\Psi_0(r) \sim \frac{1}{r}\exp\left(\frac{\mu e^2 r}{l\eta^2}\right) \quad (38)$$

当 $r \to 0$ 时，波函数发散，应舍去。

取 $\beta = -(l+1)$，得基态波函数

$$\varphi_0(r) \sim r^{(l+1)}\exp\left(-\frac{\mu e^2 r}{(l+1)\eta^2}\right) \quad (39)$$

和基态能量 $$E_0 = -\frac{\mu e^4}{2(l+1)^2\eta^2} \quad (40)$$

利用(9) 式，由基态波函数，可得超势

$$W(r)=\sqrt{\frac{\mu}{2}}\frac{e^2}{(l+1)\eta}-\frac{(l+1)\eta}{\sqrt{2\mu}r} \tag{41}$$

联立(14)(41) 式得超对称配偶势

$$\begin{cases} V_-(r,\lambda_0)=-\dfrac{e^2}{r}+\dfrac{l(l+1)\eta}{2\mu r^2}+\dfrac{\mu e^4}{2(l+1)^2\eta^2} \\ V_+(r,\lambda_0)=-\dfrac{e^2}{r}+\dfrac{(l+1)(l+2)\eta^2}{2\mu r^2}+\dfrac{\mu e^4}{2(l+1)^2\eta^2} \end{cases} \tag{42}$$

取 $\lambda_0=l,\lambda_1=l+1$，则

$$R(\lambda_1)=\frac{\mu e^4}{2\eta^2}\left[\frac{1}{(l+1)^2}-\frac{1}{(l+2)^2}\right] \tag{43}$$

在氢原子的情况下，(32) 式中的求和极限应为径向量子数 n_r，即可得 $\hat{H}_-$ 的束缚态能级

$$E_{n_r}^{(-)}=\frac{\mu e^4}{2\eta^2}\left[\frac{1}{(l+1)^2}-\frac{1}{(l+n_r+1)^2}\right] \tag{44}$$

因为　$n=n_r+l+1$

所以氢原子的能量本征值

$$E_n=E_{n_r}^{(-)}+E_0=-\frac{\mu e^4}{2n^2\eta^2} \tag{45}$$

与相关量子力学结果一致，但却无需求解复杂的合超流几何方程。

3　结　语

综上所述，形状不变势作用下量子体系的能级和波函数可以用超对称的代数方法求解，其关键要素在于计算超对称配偶势 $W(x,\lambda)$，而超势可由基态波函数来表达，其求解过程简洁而又对称，与一维谐振子的因式分解法有异曲同工之妙。

参考文献：

[1] 曾谨言. 量子力学导论[M]. 第二版. 北京：北京大学出版社，1999. 242.

[2] 张　礼，葛墨林. 量子力学的前沿问题[M]. 北京：清华大学出版社，2000. 90－98，379.

[3] 马中骐. 物理学中的群论[M]. 北京：科学出版社，1998. 126－130.

[4] 曾谨言. 量子力学导论[M]. 第二版. 北京：北京大学出版社，1999. 246.

[5] Fanandez F M, Costro E A. On the status and perspectices transition data in the be isoelectronic sequence[J]. Am J Phys, 1984,52:344.

[6] Ranabir Dutt, Safronova M S, Johson W R. The common method of finding normal for the multidimensional linear microvibration[J]. Am J Phys, 1988,56:163.

[7] Fred Cooper, Hibbert A, Jonsson P. An approximate analytical method for solving strong coupling Schr?dinger equation[J]. Phys Rew D, 1987,36:2458.

[8] 徐龙道. 物理学词典[M]. 北京：科学出版社，2004. 585.

[9] Marshall Luban, Kingston A E, Safronova M S. Schrödinger factorization method for a one-dimensional harmonic osciator, raising and lowering operators [J]. Phys Rew D, 1986,33:431.

[10] 喀兴林. 高等量子力学[M]. 第二版. 北京：高等教育出版社，2001. 126.

防爆蓄电池叉车研制项目通过省级鉴定

由浙江科技学院机械与汽车工程学院宋德玉教授主持的"防爆蓄电池叉车研制"项目近期通过了由浙江省科技厅主持的成果鉴定。该项目是 2003 年由浙江省科技厅立项、我校有关教师和杭州叉车厂共同研制完成的省计划项目。鉴定会上，与会专家对此项目给予了高度评价，一致认定该项目研究成果达到了国内领先水平。专家们同时指出，该项目不仅具有很好的经济效益，而且是一个充分发挥高校和企业各自优势的典型的产学研合作成果。希望我校进一步发挥科技优势，加大与企业合作的力度，为浙江经济的发展作出更大贡献。