浙江科技学院学报,第17卷第4期,2005年12月
Journal of Zhejiang University of Science and Technology
Vol. 17 No. 4, Dec. 2005

最小二乘法双圆弧拟合矩形花键精滚刀的设计

田国华
(浙江广播电视大学 萧山学院,浙江 杭州 311200)

摘 要:介绍了用两段光滑连接的圆弧曲线来代替矩形花键精滚刀的法向理论超越方程曲线。对于圆弧与超越方程曲线的啮合,运用了最小二乘法,使其法向齿形误差达到最小。运用数值分析对内切双圆弧进行求解。实例显示,其齿形误差精度可控制在0.01 mm以内,完全能满足精加工要求。

关键词:矩形花键精滚刀;双圆板;最小二乘法;误差最小
中图分类号:TG721　　**文献标识码**:A　　**文章编号**:1671-8798(2005)04-0261-03

Design of rectangle spline refined hob fitted by least squares twin arc

TIAN Guo-hua
(Xiaoshan college, Zhejiang Radio & TV University, Hangzhou 311200, China)

Abstract: This paper presents the "smooth-connection circular" methed to replace the transcendental equation curve of normal theory on rectangle spline refined hob. To the gear of circular and transcendental equation curve, the employment of least squares fit decreases the error to its greatest degree. The determination of twin circular is realized through software calculation. An example illustrates the gear approaching precision is within the range of 0.01 mm, and could meet the needs of finishing machines.

Key words: rectangle spline refined hob; twin circular flat-plate; least squares fit; error minimum

齿轮滚刀是按交错轴斜齿轮啮合原理加工齿轮的展成刀具。滚齿加工原理相当于交错轴斜齿轮副的啮合过程,其中,滚刀相当于一个螺旋角很大的斜齿圆柱齿轮[1]。在滚齿过程中,滚刀与被切齿轮作空间啮合,为了使齿轮在全长上都切出轮齿,滚刀还必须沿齿轮轴线方向走刀。

对于一些键齿较高的矩形花键,一般矩形花键滚刀滚出的键侧齿形误差在0.05 mm以上,难以达到图纸要求,为此多留有一定磨削余量[2]。但由于磨削效率低,因此,对成批生产不利。为了提高生产效率,采用高精度的滚刀滚削,使花键精度不作磨齿而即达到要求。而矩形花键滚刀的理论曲线为一超越方程曲线,实际加工难以达到此正确齿形,因此,常采用圆弧来代替此超越方程。一段圆弧不能达到要求,而三段圈弧又铲磨困难,故现在国内外多采用双圆弧来拟合此段曲线,但一般双圆弧设计齿形误差在0.025 mm以上。

笔者采用最小二乘法双圆弧拟合设计,可使齿形设计误差控制在0.01 mm以内,完全能满足设计要求。

收稿日期:2004-04-21
作者简介:田国华(1970—),男,浙江萧山人,讲师,主要从事机械设计与制造的教学与研究。

1 最小二乘法双圆弧拟合

要用双圆弧来拟合齿形，首先两段圆弧须光滑连接，然后联合最小二乘法求出双圆弧的参数。

1.1 两圆弧相切的条件

两圆弧相切，相切点与两圆弧的圆心处在同一条直线上。

设有两段圆弧，小圆弧圆心 $O_1(x_a, y_a)$，半径 r_a；大圆弧圆心 $O_2(X_a, Y_a)$，半径 R_a。见图1。

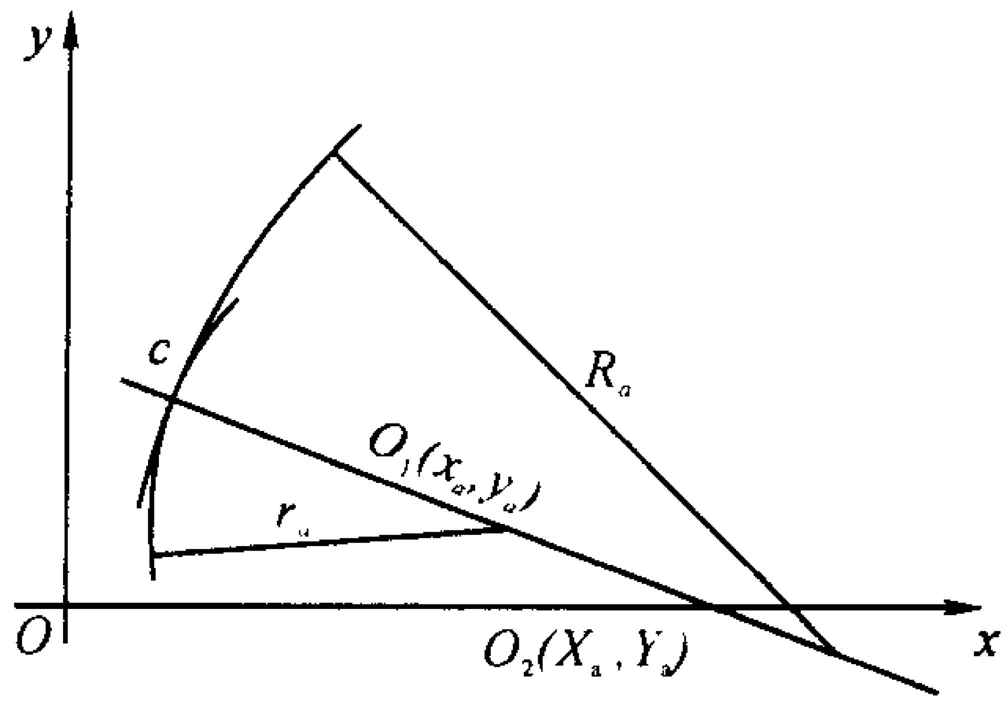

图1 两圆弧内切条件

则相切的重要条件为

$$O_1O_2 = R_a - r_a$$

即 $(X_a - x_a)^2 + (Y_a - y_a)^2 = (R_a - r_a)^2$ (1)

1.2 最小二乘法圆弧拟合

如图2坐标系中有点1、2、3、4、5五个点，其坐标分别为 (x_1, y_1)，(x_2, y_2)，(x_3, y_3)，(x_4, y_4)，(x_5, y_5)，对应于 x_1、x_2、x_3、x_4、x_5 的圆弧 y 坐标值分别为 y_1'、y_2'、y_3'、y_4'、y_5'。函数值 $Q = \sum_{i=1}^{5}(y_i - y_i')^2$ 最小时，则称圆弧 (x, y, r) 为此曲线的最小二乘法圆弧拟合。

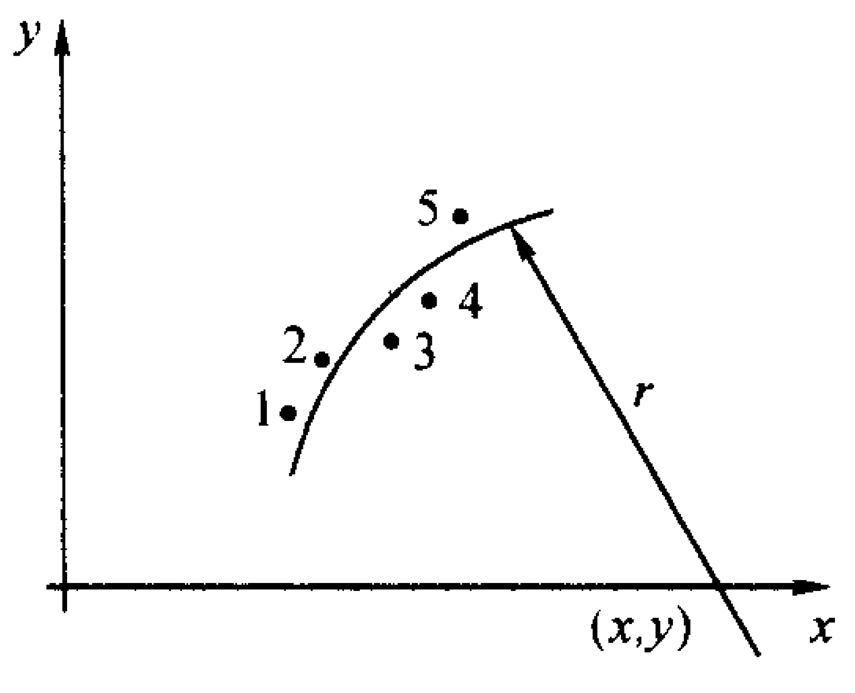

图2 最小二乘法圆弧拟合示意图

1.3 最小二乘法双圆弧拟合滚刀法向齿形

1.3.1 第一段圆板的初定　据滚切瞬时啮合角 α，选定一个 α 值，记为 α_q。先对 α_j（节圆齿形角）至 α_q 范围内的理论曲线进行最小二乘法拟合出一段圆弧 (x_a, y_a, r_a)。计算此段圆弧与曲线的偏差 $\Delta 1$，使 $\Delta 1 < \varepsilon/3$（ε 为花键键宽公差）。

1.3.2 双圆弧的确定　由初定的第一段圆弧 (x_a, y_a, r_a) 作为初始值，经调整最终确定一、二段圆弧 (x_a, y_a, r_a)、(X_a, Y_a, R_a)，过程如下：

将(1)式展开，并以 $X_a = -a_1/2, Y_a = -a_2/2, X_a^2 + Y_a^2 - R_a^2 = a_0$ 代入：

可得：

$$a_0 + x_a a_1 + y_a a_2 = -[2r_a R_a + (x_a^2 + y_a^2 - r_a^2)] \quad (2)$$

再将 αq 到 $\alpha_{\max}$（最大啮合角）间的曲线进行最小二乘法圆弧拟合，得其由三个方程组成的正规方程组（见文献[3]），取其中两个方程与(2)式组成一个三元一次的方程组，得双圆弧拟合的正规方程组：

$$\begin{cases} a_0 + x_a a_1 + y_a a_2 = -[2r_a R_a + (x_a^2 + y_a^2 - r_a^2)] \\ (\sum_{i=1}^{n} x_i)a_0 + (\sum_{i=1}^{n} x_i^2)a_1 + (\sum_{i=1}^{n} x_i y_i)a_2 = \\ \qquad -(\sum_{i=1}^{n} x_i^3 + \sum_{i=1}^{n} x_i y_i^2) \\ (\sum_{i=1}^{n} y_i)a_0 + (\sum_{i=1}^{n} x_i y_i)a_1 + (\sum_{i=1}^{n} y_i^2)a_2 = \\ \qquad -(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 y_i + \sum_{i=1}^{n} y_i^3) \end{cases} \quad (3)$$

解方程组可得两相切拟合圆弧 (x_a, y_a, r_a)、(X_a, Y_a, R_a)。

关于最小的双圆弧，至今还没有一个统一的标准，但这里从几何和实际应用的角度出发给出最小的标准如下：① 曲线的长度最短；② 曲线的扭曲最小，即相临的圆弧所在平面的夹角最小；③ 曲线光顺，即相临的圆弧的曲率半径尽可能接近[4]。

在这里采用如下方法得到最小的双圆弧：计算两段圆弧与超越方程曲线的偏差 $\Delta 1$、$\Delta 2$，并进行比较。若相差多则调大或调小 αq 的值，重新计算 (x_a, y_a, r_a) 和 (X_a, Y_a, R_a)，使最终得出的 $\Delta 1$ 与 $\Delta 2$ 相差为最小，而且双圆弧总偏差 Δ 也须小于花键键宽公差 ε 的1/3。由此所得的两段光滑连接圆弧为与滚刀法向齿形理论曲线偏差最小的双圆弧。

2 用计算机辅助设计

由于在整个设计过程中，圆弧与理论曲线偏差计算及解三元一次方程组是一个不断重复的过程，工作量比较大，手工难以胜任，宜用计算机编程来解决繁琐的计算过程。

2.1 编程过程中的几个要点

(1) 对于两圆弧切点处对应的 α_q 的初值，一般先取 α_q 为 $\alpha_{\max}$ 的中间值左右，然后再根据哪段圆弧

的偏差大来往哪边调。

(2) 在解三元一次方程时,若用多元一次方程组行列式解法,则需在计算过程中不断地对 R_a 进行调整。R_a 初值一般取比 r_a 大一些,然后让每次计算出来的 R_a 值来取代前而一次计算出的 R_a 值进行下一次计算。直到代入的 R_a 值与计算出来的 R_a 值相差极小。

(3) 比较大、小圆弧的总偏差时,要让两段圆弧的偏差均小于键宽公差 ε 的 1/3,并且让两段圆弧与整段曲线的总误差小于 $\varepsilon/3$,不然就调整 α_q 的值。

2.2　程序框图

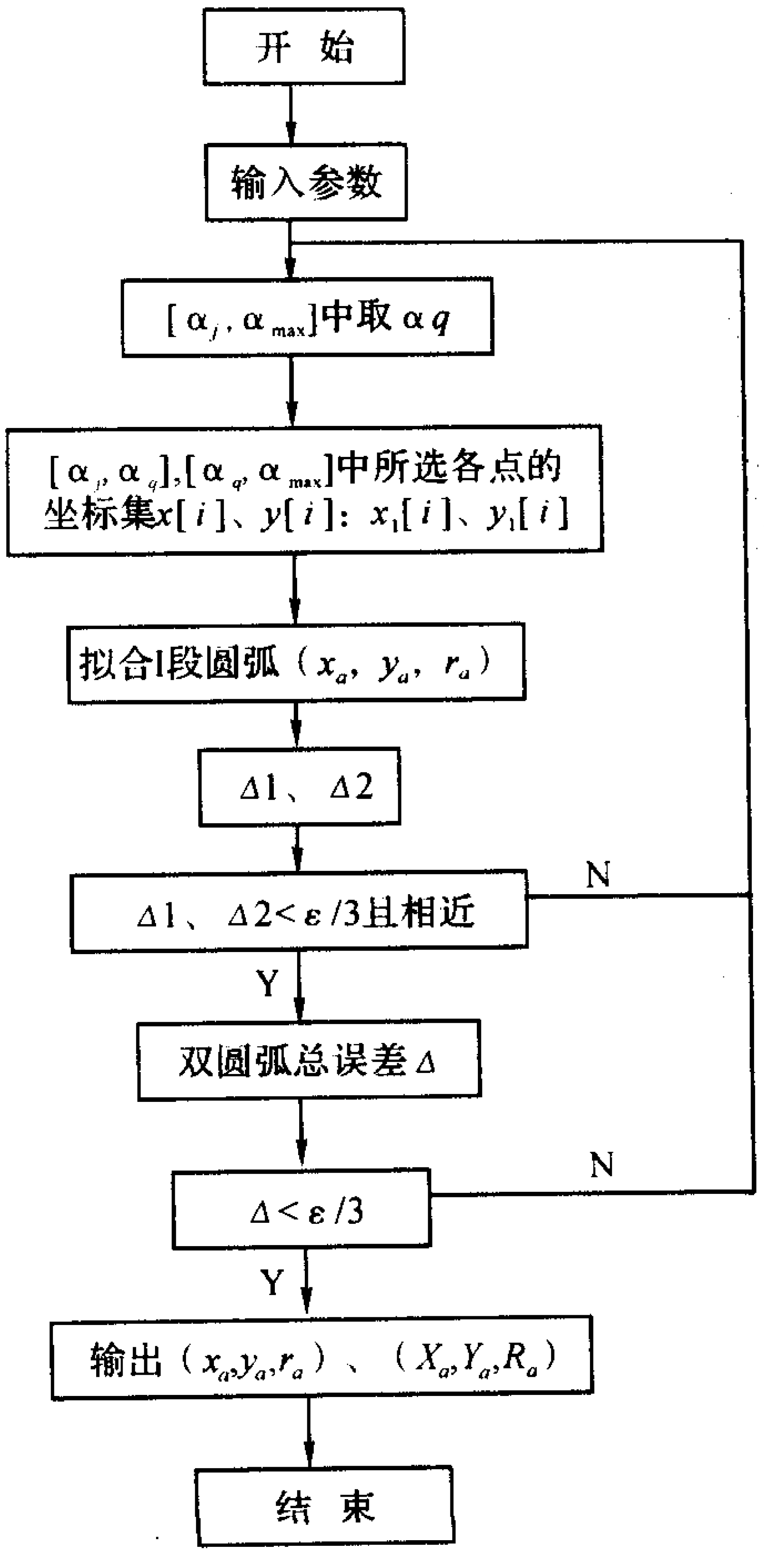

图3　程序设计结构框图

根据上述框图,可以用C语言编出其计算程序。

3　计算实例

如要加工某一矩形花键,其参数如下:

矩形花键轴外径 $D_e = \phi 44.7\left(^{-0.16}_{-0.24}\right)$,轴内径 $D_i = \phi 31.5\left(^{0}_{-0.39}\right)$,键宽 $b = 5\left(^{-0.088}_{-0.118}\right)$,外径倒角 $c = 0.5 \times 45°$,键数 $n = 10$,有效齿宽范围 $D_r = 36\left(^{-0.170}_{-0.560}\right)$。

输入以上参数,得加工此矩形花键的精滚刀两拟合圆弧的参数计算结果

$X_a = 8.402\,9, y_a = -1.290\,4, r_a = 8.501\,5$

$X_a = 17.044\,4, Y_a = -4.638\,0, R_a = 17.768\,7$

双圆弧与理论曲线的总误差 $\Delta = 0.009\,746$ mm。

4　结　论

由此可见,用最小二乘法双圆弧拟合设计来代替矩形花键精滚刀的理论法向曲线,可使齿形设计误差控制在较小的 0.01 mm 以内,若再配合其他方法,如采用增大滚刀外径、增加容屑槽数,并采用单头滚刀[3]等方法以提高齿形精度等,完全可以设计出高精度的矩形花键精滚刀。

参考文献:

[1] 上海市金属切削技术协会. 金属切削手册[M]. 第三版. 上海:上海科学技术出版社,2004.

[2] 四川省机械工业局. 复杂刀具设计手册(下册)[M]. 北京:机械工业出版社,1979.

[3] 四川省机械工业局. 齿轮刀具设计理论基础(上册)[M]. 北京:机械工业出版社,1982.

[4] 陈建兰,李素兰. 空间三次曲线的最佳双圆弧逼近和误差估计[J]. 浙江工业大学学报,2002,30(4):402—405.