浙江科技学院学报,第 18 卷第 1 期,2006 年 3 月
Journal of Zhejiang University of Science and Technology
Vol. 18 No. 1, Mar. 2006

二维空间的离散 W 变换

叶赛英
(浙江科技学院 理学院,杭州 310023)

摘 要: 利用一维离散 Walsh 变换的性质与结果,定义了二维离散 Walsh 变换及二维 Walsh 变换的逻辑卷积,证明了二元 W 系的完整性,给出二维 Walsh 变换的基本运算性质及二维 Walsh 变换下 $1 \leqslant p \leqslant 2$ 时的 Hausdorff-Young 不等式。

关键词: 二维离散 Walsh 变换;逻辑卷积;完整性;卷积定理;Hausdorff-Young 不等式
中图分类号: O174.1;O174.22 **文献标识码:** A **文章编号:** 1671-8798(2006)01-0008-05

On Two-dimensional Walsh Transform

YE Sai-ying
(School of Science, Zhejiang University of Science and Technology, Hangzhou 310023, China)

Abstract: Based on the transform property and result of one-dimention Walsh, definition of the kind of Walsh and logical convolution in two dimensions are presented. Completeness of W systems of two variables are deduced. Properties and convergence of one-dimensional Walsh functions can be extended to two-dimensional case including convolution theorem and Hausdorff-Young inequality in two dimensions when $1 \leqslant p \leqslant 2$.

Key words: two-dimensional Walsh transform; logic convolution; completeness; convolution theorem; Hausdorff-Young inequality

在离散 Fourier 变换理论中,对函数 $f(x) \in L_{2\pi}$, $1 \leqslant q \leqslant \infty$,定义

$$f^{\wedge}(k) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(u)\mathrm{e}^{-iku}\mathrm{d}u,\ k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots,$$

为 f 的离散 Fourier 变换。如果给出函数 $w_k(x)$ 是自然序 W 函数,则称

$$f^{\wedge}(k) = \int_0^1 f(x) w_k(x)\mathrm{d}x,\ k \in N$$

为一维离散 Walsh 变换,其中 $N = \{0, 1, 2, \cdots\}$,为自然数集。

对于一维离散 Walsh 变换,已有许多研究[1-3]。本文试图对二维离散 Walsh 变换情形加以考虑并得到若干性质。

1 定义及引理

定义 1 设 $E = [0,1) \times [0,1)$, $f \in L(E)$,

收稿日期: 2005-07-04
基金项目: 浙江科技学院科研基金项目(ZF200510)
作者简介: 叶赛英(1980—),女,浙江松阳人,助教,主要从事高等数学教学和组合优化函数论的研究。

$w_{k_1}(x)$,$w_{k_2}(x)$ 为自然序 W 函数,定义在 E 上的二元 W 系为 $\{wal_{k_1}(x), wal_{k_2}(y)\}$,$k_1, k_2 \in N$,那么 f 在空间 $L(E)$ 上的离散 W 变换是定义在自然数集 $N\times N$ 上的函数 $f^\wedge(k_2, k_2)$:

$$f^\wedge(k_1,k_2)=\int_0^1\int_0^1 f(x,y)w_{k_1}(x)w_{k_2}(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \quad [1,2] \tag{1}$$

定义 2　设 $f,g\in L(E)$,称下述积分为两函数 f 与 g 的二维 W 变换的逻辑卷积:

$$(f\otimes g)(x,y)=\int_0^1\int_0^1 f(x\oplus s,y\oplus t)g(s,t)\mathrm{d}t\mathrm{d}s \tag{2}$$

式(2) 中 $x\in[0,1)$,$y\in[0,1)$。

引理 1　设 $0\leqslant x<1$,$0\leqslant y<1$,记 $D_k(x,y)=\sum\limits_{k_1=0}^{k-1}\sum\limits_{k_2=0}^{k-1}w_{k_1}(x)w_{k_2}(y)$ 为 Dirichlet 核,则

$$D_{2^n}(x,y)=\begin{cases}2^{2n}, & 0\leqslant x,y<1\\ 0, & \text{其他情形}\end{cases},$$

从而　$\int_0^1\int_0^1 D_{2^n}(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=1$。

证明:由于 $D_k(x,y)=\sum\limits_{k_1=0}^{k-1}\sum\limits_{k_2=0}^{k-1}w_{k_1}(x)w_{k_2}(y)$,

所以

$$D_{2^n}(x,y)=\sum_{k_1,k_2=0}^{2^n-1}w_{k_1}(x)w_{k_2}(y)=\sum_{k_1=0}^{2^n-1}w_{k_1}(x)\sum_{k_2=0}^{2^n-1}w_{k_2}(y)。$$

又由于

$$D_{2^n}(x)=\sum_{k=0}^{2^n-1}w_k(x),$$

从而

$$D_{2^n}(x,y)=\sum_{k_1=0}^{2^n-1}w_{k_1}(x)\sum_{k_2=0}^{2^n-1}w_{k_2}(y)=D_{2^n}(x)D_{2^n}(y)。$$

而

$$D_{2^n}(x)=\begin{cases}2^n, & 0\leqslant x<\dfrac{1}{2^n}\\ 0, & \dfrac{1}{2^n}\leqslant x<1\end{cases} \quad [1],$$

所以有结论

$$D_{2^n}(x,y)=\begin{cases}2^{2n}, & 0\leqslant x,y<\dfrac{1}{2^n}\\ 0 & \text{其他情形}\end{cases}。$$

显然

$$\int_0^1\int_0^1 D_{2^n}(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{\frac{1}{2^n}}\int_0^{\frac{1}{2^n}}D_{2^n}(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=1。$$

引理 2　设 $S_n(f\,x,y)=S_n(x,y)=\sum\limits_{k_1}^{n-1}\sum\limits_{k_2}^{n-1}f^\wedge(k_1,k_2)w_{k_1}(x)w_{k_2}(y)$,$f(x,y)\in L(E)$,则,除去一个二维零测度集外有:

$S_{2^n}(x,y)=f(x,y)$,当 (x,y) 是连续点时。

证明:引进公式 $w_n(x)w_n(y)=w_n(x\oplus y)$ [1]

$$\begin{aligned}
S_n(x,y)&=\sum_{k_1}^{n-1}\sum_{k_2}^{n-1}f^\wedge(k_1,k_2)w_{k_1}(x)w_{k_2}(y)\\
&=\sum_{k_1}^{n-1}\sum_{k_2}^{n-1}\int_0^1\int_0^1 f(t,s)w_{k_1}(t)w_{k_2}(s)w_{k_1}(x)w_{k_2}(y)\mathrm{d}t\mathrm{d}s\\
&=\int_0^1\int_0^1 f(t,s)\sum_{k_1}^{n-1}\sum_{k_2}^{n-1}w_{k_1}(t\oplus x)w_{k_2}(s\oplus y)\mathrm{d}t\mathrm{d}s\\
&=\int_0^1\int_0^1 f(t,s)D_n(t\oplus x,s\oplus y)\mathrm{d}t\mathrm{d}s\\
&=\int_0^1\int_0^1 f(t\oplus x,s\oplus y)D_n(t\oplus x\oplus x,s\oplus y\oplus y)\mathrm{d}t\mathrm{d}s
\end{aligned}$$

(二进移位不变性)

$$=\int_0^1\int_0^1 f(t\oplus x,s\oplus y)D_n(t,s)\mathrm{d}t\mathrm{d}s$$

$\forall x\in[0,1)$,$y\in[0,1)$

设 (x,y) 为 $f(x,y)$ 的连续点,即 $\forall\varepsilon>0$,$\exists\delta>0$,使得当 $(x',y')\in U((x,y),\delta)$ 时,有:

$$|f(x',y')-f(x,y)|<\varepsilon。$$

取自然数 N,使得 $\dfrac{1}{2^N}<\delta$,当 $n>N$,且 $0\leqslant t<\dfrac{1}{2^N}$ 时,易知

$$(x\oplus t,y\oplus s)\in U((x,y),\delta),$$

相应有

$$|f(x\oplus t,y\oplus s)-f(x,y)|<\varepsilon,$$

由引理 1 得:

$$\begin{aligned}
&|S_{2^n}(x,y)-f(x,y)|\\
&=\left|\int_0^1\int_0^1 f(x\oplus t,y\oplus s)D_{2^n}(t,s)\mathrm{d}t\mathrm{d}s-\int_0^1\int_0^1 f(x,y)D_{2^n}(t,s)\mathrm{d}t\mathrm{d}s\right|\\
&=\left|\int_0^1\int_0^1\{f(x\oplus t,y\oplus s)-f(x,y)\}\mathrm{d}t\mathrm{d}s\right|\\
&=\left|2^{2n}\int_0^{\frac{1}{2^n}}\int_0^{\frac{1}{2^n}}\{f(x\oplus t,y\oplus s)-f(x,y)\}\mathrm{d}t\mathrm{d}s\right|\\
&<2^{2n}\int_0^{\frac{1}{2^n}}\int_0^{\frac{1}{2^n}}|f(x\oplus t,y\oplus s)-f(x,y)|\mathrm{d}t\mathrm{d}s\\
&<2^{2n}\varepsilon\int_0^{\frac{1}{2^n}}\int_0^{\frac{1}{2^n}}\mathrm{d}t\mathrm{d}s=\varepsilon \qquad (n>N)
\end{aligned}$$

即　$\lim\limits_{n\to\infty}S_{2^n}(x,y)=f(x,y)$。

引理 3 引理 2 结论对 (x,y) 为固定二进制无理点也成立。

证明：由于 (x,y) 是固定的二进制无理点，所以总属于某个面积为 $\frac{1}{2^{2n}}$ 的领域

$I_{N,s,t}=\left\{(x,y):\frac{s}{2^N}\leqslant x<\frac{s+1}{2^N},\frac{t}{2^N}\leqslant x<\frac{t+1}{2^N}\right\}$ $(s,t=0,1,2,\cdots,2^{N-1})$ 的内部。

当 $0\leqslant a,b<\frac{1}{2^n}$ 时，

$$(x',y')=(x\oplus a,y\oplus b)\in I_{N,s,t}$$

（可列个 a,b 除外）

即 $I_{N,s,t}$ 在二进移位变换下的象是 $I_{N,s,t}$

记 $|I_{N,s,t}|=\frac{1}{2^{2n}}$ 为 $I_{N,s,t}$ 的面积，

于是部分和

$$S_{2^n}(x,y)=\frac{1}{I_{N,s,t}}\iint\limits_{I_{N,s,t}}f(u,v)\mathrm{d}u\mathrm{d}v$$
$$(x,y)\in I_{N,s,t}\text{。}$$

因为 $f(x,y)\in L(E)$，从而几乎处处有

$$\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}\int_0^y\int_0^x f(u,v)\mathrm{d}u\mathrm{d}v=f(x,y),$$

因而使上式成立的点 (x,y) 所成的集合的测度为 1。

下证 $\forall(x,y)\in I_{N,s,t}$，有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{|I_{N,s,t}|}\iint\limits_{I_{N,s,t}}f(u,v)\mathrm{d}u\mathrm{d}v=f(x,y)\text{。}$$

令

$$\delta_n=x-\frac{s}{2^n},$$
$$\Delta_n=\frac{s+1}{2^n}-x,$$
$$\delta_n'=y-\frac{t}{2^n},$$
$$\Delta_n'=\frac{t+1}{2^n}-y,$$

$$\frac{1}{|I_{N,s,t}|}\iint\limits_{I_{N,s,t}}f(u,v)\mathrm{d}u\mathrm{d}v$$
$$=\frac{1}{(\delta_n+\Delta_n)(\delta_n'+\Delta_n')}\int_{\frac{s}{2^n}}^{\frac{s+1}{2^n}}\int_{\frac{t}{2^n}}^{\frac{t+1}{2^n}}f(u,v)\mathrm{d}u\mathrm{d}v$$
$$=\frac{1}{(\delta_n+\Delta_n)(\delta_n'+\Delta_n')}\int_{x-\delta_n}^{x+\Delta_n}\int_{y-\delta_n'}^{y+\Delta_n'}f(u,v)\mathrm{d}u\mathrm{d}v$$
$$=\frac{1}{(\delta_n+\Delta_n)(\delta_n'+\Delta_n')}\{I_1+I_2+I_3+I_4\}\text{。}$$

其中：

$$I_1=\int_{x-\delta_n}^{x}\int_{y-\delta_n'}^{y}f(u,v)\mathrm{d}u\mathrm{d}v,$$
$$I_2=\int_{x-\delta_n}^{x}\int_{y}^{y+\Delta_n'}f(u,v)\mathrm{d}u\mathrm{d}v,$$
$$I_3=\int_{x}^{x+\Delta_n}\int_{y-\delta_n'}^{y}f(u,v)\mathrm{d}u\mathrm{d}v,$$
$$I_4=\int_{x}^{x+\Delta_n}\int_{y}^{y+\Delta_n'}f(u,v)\mathrm{d}u\mathrm{d}v\text{。}$$

当 $n\to\infty$ 时，$\delta_n,\Delta_n,\delta_n',\Delta_n'\to 0$，从而有：

$$\frac{1}{\delta_n\delta_n'}I_1\to f(x,y),$$
$$\frac{1}{\delta_n\Delta_n'}I_2\to f(x,y),$$
$$\frac{1}{\Delta_n\delta_n'}I_3\to f(x,y),$$
$$\frac{1}{\Delta_n\Delta_n'}I_4\to f(x,y)\text{。}$$

于是 $\forall\varepsilon>0$，$\exists N_\varepsilon$，使当 $n>N_\varepsilon$ 时，有：

$$\frac{1}{\delta_n\delta_n'}I_1=f(x,y)+\varepsilon_1,$$
$$\frac{1}{\delta_n\Delta_n'}I_2=f(x,y)+\varepsilon_2,$$
$$\frac{1}{\Delta_n\delta_n'}I_3=f(x,y)+\varepsilon_3,$$
$$\frac{1}{\Delta_n\Delta_n'}I_4=f(x,y)+\varepsilon_4,$$

且 $|\varepsilon_1|+|\varepsilon_2|+|\varepsilon_3|+|\varepsilon_4|<\varepsilon$。

所以

$$\frac{1}{|I_{N,s,t}|}\iint\limits_{I_{N,s,t}}f(u,v)\mathrm{d}u\mathrm{d}v=f(x,y)$$
$$+\frac{\delta_n\delta_n'}{(\delta_n+\Delta_n)(\delta_n'+\Delta_n')}\varepsilon_1+\frac{\delta_n\Delta_n'}{(\delta_n+\Delta_n)(\delta_n'+\Delta_n')}\varepsilon_2$$
$$+\frac{\Delta_n\delta_n'}{(\delta_n+\Delta_n)(\delta_n'+\Delta_n')}\varepsilon_3+\frac{\Delta_n\Delta_n'}{(\delta_n+\Delta_n)(\delta_n'+\Delta_n')}\varepsilon_4$$
$$\left|\frac{1}{|I_{N,s,t}|}\iint\limits_{I_{N,s,t}}f(u,v)\mathrm{d}u\mathrm{d}v-f(x,y)\right|<|\varepsilon_1|+|\varepsilon_2|$$
$$+|\varepsilon_3|+|\varepsilon_4|<\varepsilon\qquad(n>N_\varepsilon)$$

即 $\lim\limits_{n\to\infty}S_{2^n}(x,y)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{|I_{N,s,t}|}\iint\limits_{I_{N,s,t}}f(u,v)\mathrm{d}u\mathrm{d}v=f(x,y)$ 在 E 上几乎处处成立。

综合引理 2 和引理 3，可以知道二元 W 系具有完整性。

2 主要结果

命题 1 设 $f\in L(E)$，则有

(a) $[f(x\oplus h,y\oplus u)]^\wedge(k_1,k_2)$
$$=w_{k_1}(h)w_{k_2}(u)f^\wedge(k_1,k_2),$$

(b)$[w_m(x)w_n(y)f(x,y)]^\wedge(k_1,k_2)=f^\wedge(m+k_1,n+k_2)$，其中 $h,u\in[0,1)$，$k_1,k_2,m,n\in N$。

证明：为证明式(a) 成立，利用定义式(1)

$$[f(x\oplus h,y\oplus u)]^\wedge(k_1,k_2)$$
$$=\int_0^1\int_0^1 f(x\oplus h,y\oplus u)w_{k_1}(x)w_{k_2}(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
$$=\int_0^1\int_0^1 f(x,y\oplus u)w_{k_1}(x\oplus h)w_{k_2}(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
$$=\int_0^1\int_0^1 f(x,y)w_{k_1}(x)w_{k_1}(h)w_{k_2}(y)w_{k_2}(u)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
$$=w_{k_1}(h)w_{k_2}(u)\int_0^1\int_0^1 f(x,y)w_{k_1}(x)w_{k_2}(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
$$=w_{k_1}(h)w_{k_2}(u)f^\wedge(k_1,k_2)$$，所以式(a) 得证。

同理

$$[w_m(x)w_n(y)f(x,y)]^\wedge(k_1,k_2)$$
$$=\int_0^1\int_0^1 w_m(x)w_n(y)f(x,y)w_{k_1}(x)w_{k_2}(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
$$=\int_0^1\int_0^1 w_{m\oplus k_1}(x)w_{n\oplus k_2}(y)f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
$$=f^\wedge(m+k_1,n+k_2)$$，所以式(b) 得证。

命题 2　设 $f\in L(E)$，则有

(a) $\overline{[f(x,y)]}^\wedge(k_1,k_2)=\overline{f^\wedge(k_1,k_2)}$；

(b) $f^\wedge(k_1,k_2)=0$，且 $k_1,k_2\in N_0$，则 $f(x,y)=0$，几乎处处成立；

(c) $|f^\wedge(k_1,k_2)|\leqslant\|f\|_1=\int_0^1\int_0^1|f(x,y)|\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，

其中 $k_1,k_2\in N$。

证明：先来看式(a)，不难发现

$$\overline{[f(x,y)]}^\wedge(k_1,k_2)$$
$$=\int_0^1\int_0^1\overline{f(x,y)}w_{k_1}(x)w_{k_2}(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
$$=\overline{\int_0^1\int_0^1 f(x,y)w_{k_1}(x)w_{k_2}(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y}$$
$$=\overline{f^\wedge(k_1,k_2)}。$$

对于式(b)，由二维 W 系的完整性立得。

最后看式(c)，易知

$$|f^\wedge(k_1,k_2)|=\left|\int_0^1\int_0^1 f(x,y)w_{k_1}(x)w_{k_2}(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right|。$$

由于 $w_{k_1}(x)$，$w_{k_2}(y)$ 的值都不大于 1，所以

$$该式\leqslant\left|\int_0^1\int_0^1 f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right|\leqslant\int_0^1\int_0^1|f(x,y)|\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
$$=\|f\|_1。$$

命题 3　卷积具有对称性，即设 $f,g\in L(E)$，有

$$(f\otimes g)(x,y)=(g\otimes f)(x,y)。$$

证明：由式(2) 及二进移位不变性可得：

$$(f\otimes g)(x,y)=\int_0^1\int_0^1 f(x\oplus s,y\oplus t)g(s,t)\mathrm{d}t\mathrm{d}s$$
$$=\int_0^1\int_0^1 f(s,y\oplus t)g(s\oplus x,t)\mathrm{d}t\mathrm{d}s$$
$$=\int_0^1\int_0^1 f(s,t)g(s\oplus x,t\oplus y)\mathrm{d}t\mathrm{d}s$$
$$=(g\otimes f)(x,y)，$$

命题 3 得证。

命题 4　设 $f,g\in L(E)$，则有

(a)$(\alpha f+\beta g)^\wedge(k_1,k_2)=\alpha f^\wedge(k_1,k_2)+\beta g^\wedge(k_1,k_2)$；

(b)$(f\otimes g)\in L(E)$，且

$$(f\otimes g)^\wedge(k_1,k_2)=f^\wedge(k_1,k_2)g^\wedge(k_1,k_2)。$$

其中，$k_1,k_2\in N$，式(b) 称为 Walsh 变换中的卷积定理。

证明：对式(a)，由定义

$$(\alpha f+\beta g)^\wedge(k_1,k_2)$$
$$=\int_0^1\int_0^1(\alpha f+\beta g)(x,y)w_{k_1}(x)w_{k_2}(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
$$=\int_0^1\int_0^1\alpha f(x,y)w_{k_1}(x)w_{k_2}(y)+\beta g(x,y)w_{k_1}(x)w_{k_2}(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
$$=\alpha\int_0^1\int_0^1 f(x,y)w_{k_1}(x)w_{k_2}(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
$$+\beta\int_0^1\int_0^1 g(x,y)w_{k_1}(x)w_{k_2}(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
$$=\alpha f^\wedge(k_1,k_2)+\beta g^\wedge(k_1,k_2)。$$

再来看式(b)，由定义，

$$\int_0^1\int_0^1|(f\otimes g)(x,y)|\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
$$=\int_0^1\int_0^1\left|\int_0^1\int_0^1 f(x\oplus s,y\oplus t)g(s,t)\mathrm{d}t\mathrm{d}s\right|\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
$$\leqslant\int_0^1\int_0^1\int_0^1\int_0^1|f(x\oplus s,y\oplus t)g(s,t)|\mathrm{d}t\mathrm{d}s\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
$$\leqslant\int_0^1\int_0^1|g(s,t)|\mathrm{d}t\mathrm{d}s\int_0^1\int_0^1|f(x\oplus s,y\oplus t)|\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
$$=\int_0^1\int_0^1|g(s,t)|\mathrm{d}s\mathrm{d}t\int_0^1\int_0^1|f(x,y)|\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
$$=\|g\|_2\|f\|_2，$$

所以$(f\otimes g)\in L(E)$，且有

$$[f\otimes g]^\wedge(k_1,k_2)$$
$$=\int_0^1\int_0^1\left[\int_0^1\int_0^1 f(x\oplus s,y\oplus t)g(s,t)\mathrm{d}t\mathrm{d}s\right]w_{k_1}(x)w_{k_2}(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
$$=\int_0^1\int_0^1 g(s,t)\left[\int_0^1\int_0^1 f(x\oplus s,y\oplus t)w_{k_1}(x)w_{k_2}(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}s\mathrm{d}t$$

$$= \int_0^1\int_0^1 g(s,t)w_{k_1}(s)w_{k_2}(t)f^\wedge(k_1,k_2)\mathrm{d}s\mathrm{d}t$$

$$= f^\wedge(k_1,k_2)\int_0^1\int_0^1 g(s,t)w_{k_1}(s)w_{k_2}(t)\mathrm{d}s\mathrm{d}t$$

$$= f^\wedge(k_1,k_2)g^\wedge(s,t)。$$

综上所述，命题 4 得证。

命题 5 若 $1 \leqslant p \leqslant 2$，那么离散 W 变换是由空间 $L^q(E)$ 到空间 $l^{q'}$，$(\frac{1}{q}+\frac{1}{q'}=1)$ 的线性变换，并且

$$\|f^\wedge\|_{l^{q'}} \leqslant \|f\|_{L^q(E)} \tag{3}$$

在这里，$L^q(E)$ 是对于 E 上 q 次幂 L 可积函数全体组成的函数空间，即

$$L^q(E) = \left\{f: \|f\|_{L^q(E)} = \left\{\int_0^1\int_0^1 |f(x,y)|^q \mathrm{d}x\mathrm{d}y\right\}^{\frac{1}{q}} < +\infty\right\},$$

而 $l^{q'}$ 是数列空间：

$$l^{q'} = \left\{\alpha: (\sum_{j=1}^{\infty}|a_j|^{q'})^{\frac{1}{q'}} < +\infty\right\},$$

$$\alpha = (\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n,\cdots),$$

其中，式(3) 为二维 Walsh 变换中的 Hausdorff-Young 不等式。

证明：令 $R_1 = E$，并取通常的 Lebesgue 测度，令 $R_2 = N$，按通常的方法把 N 看成一个测度空间，其中每一点的测度为 1，对 $f \in L^q(E)$，令 T 为离散 Walsh 变换：$Tf \equiv f^\wedge$，$S_E \subset L_E^q$(S_E 为在 E 上的简单函数集)。由命题 2 的式(c) 可得 $|f^\wedge| \leqslant \|f\|_1$，所以对每个 $h \in S_E \subset L^q(E)$ 有

$$\|Th\|_{l^\infty} \leqslant \|h\|_{L^1(E)},$$

因此 T 在 S_E 上是强$(1;\infty)$ 型的。

又由于 $L^2(E)$ 为 Hilbert 空间，且 $Th \in l^2$，由 Riesz-Fisher 定理对每个 $h \in S_E$ 有

$$\|Th\|_{l^2} = \|h\|_{L^2(E)},$$

所以 T 在 S_E 上是强$(2;2)$ 型的，而且常数 $M_1 = M_2 = 1$，所以由 M. Riesz-Thorin 凸性定理[4]，对每个 $h \in S_E$ 式(3) 成立。

设 $f \in L^q(E)$ 是任意的，则存在 S_E 中的函数序列 $\{h_j\}$，使得 $\lim\limits_{j\to\infty}\|f-h_j\|_{L^q(E)} = 0$，由 Holder 不等式[4] 得：

$$|f^\wedge(k_1,k_2) - h_j^\wedge(k_1,k_2)|$$

$$= \left|\int_0^1\int_0^1 |f-h_j| w_{k_1}w_{k_2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right|$$

$$\leqslant \left\{\int_0^1\int_0^1 |f-h_j|^q \mathrm{d}x\mathrm{d}y\right\}^{\frac{1}{q}}\left\{\int_0^1\int_0^1 |w_{k_1}w_{k_2}|^{q'}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right\}^{\frac{1}{q'}}$$

$$\leqslant \left\{\int_0^1\int_0^1 |f-h_j|^q \mathrm{d}x\mathrm{d}y\right\}^{\frac{1}{q}}$$

$$= \|f-h_j\|_{L_q(E)}, \qquad k_1,k_2 \in N,$$

知 $\lim\limits_{j\to\infty}h_j^\wedge(k_1,k_2) = f^\wedge(k_1,k_2)$ 对每个 $k_1,k_2 \in N$ 成立，因此由 Fatou 引理[2] 得：

$$\|f^\wedge\|_{l^{q'}}^{q'} \leqslant \lim_{j\to\infty}\inf\|h_j^\wedge\|_{l^{q'}}^{q'} \leqslant \lim_{j\to\infty}\inf\|h_j\|_{L^q(E)}^{q'} = \|f\|_{L^q(E)}^{q'},$$

所以 $\|f^\wedge\|_{l^{q'}} \leqslant \|f\|_{L^q(E)}$，式(3) 成立。

参考文献：

[1] 郑维行，苏维宜，任福贤. 沃尔什函数理论与应用[M]. 上海：上海科学技术出版社，1983:58-127.

[2] 陈有昭，陈伟华，梁茂辉. 关于 Haar 函数与 Walsh 函数的特征性质[J]. 广东教育学院学报，2002(2):13-15.

[3] 邹建成，铁小匀. 广义 Gray 码及 Walsh 函数[J]. 北方工业大学学报，2001(1):23-24.

[4] Butzer P L, Nessel R I. Fourier 分析与逼近论(第一卷)[M]. 郑维行，苏维宜，任福贤，等译. 北京：高等教育出版社，1985:1-457.