浙江科技学院学报，第18卷第1期，2006年3月
Journal of Zhejiang University of Science and Technology
Vol. 18 No. 1, Mar. 2006

一类半线性抛物方程整体解的 L^q 估计

周小燕[a]，胡丰华[b]
（浙江科技学院 a. 理学院；b. 人事处，杭州 310023）

摘　要：研究一类带有奇性系数的具有 Neumann 边界及 p 指数的半线性抛物方程整体正解的 L^q 估计。主要使用 Moser 迭代法进行 L^q 估计，并且在进行正则化之后，证明了对所有的 $t \geqslant t_0 > 0$、具有低能量初值的整体解是古典解。

关键词：半线性抛物方程；弱解；整体解；L^q 估计
中图分类号：O175.26　　**文献标识码**：A　　**文章编号**：1671-8798(2006)01-0013-03

L^q-estimate of Global Solution of One Kind Semi-linear Parabolic Equation

ZHOU Xiao-yan[a], HU Feng-hua[b]
(a. School of Science, b. Personnel Devision, Zhejiang University of Science and Technology, Hangzhou 310023, China)

Abstract: It L^q-estimate is studied concerned with global positive solution of one kind of semi-linear parabolic equation with p exponent and Neumann boundary condition and singular coefficient. By using Moser-type iteration, it is then proved that the global positive solutions with lower-energy initial value are classical global solutions for all $t \geqslant t_0 > 0$.

Key words: semi-linear parabolic equation; weak solution; global solution; L^q-estimate

自20世纪60年代Fujita的开创性工作以来，国内外很多学者研究了以下所谓的 Fujita 问题：$u_t - \Delta u = u^p, (x,t) \in \Omega \times (0,T); u(x,0) = u_0(x) \geqslant 0, x \in \Omega; u(x,t) = 0, (x,t) \in \partial\Omega \times (0,T)$。这里的 Ω 是 $R^N (N \geqslant 3)$ 中的有界区域，边界光滑，$p > 1$。文献[1]考虑了一类具有临界 Sobolev 指数 $p = 2^* - 1$ 的 Fujita 问题中 Dirichlet 问题的整体解的 L^q 估计。文献[2]考虑了一类半线性抛物方程的 Neumann 问题：$u_t - \Delta u + u = u^{2^*-1}, x \in \Omega \times (0,T); u(x,0) = u_0(x) \geqslant 0, x \in \Omega; \frac{\partial u(x,t)}{\partial n} = 0, (x,t) \in \partial\Omega \times (0,T)$ 的整体解的 L^q 估计。

本文考虑如下形式的带有奇性系数的半线性抛物方程的 Neumann 问题：

$$\frac{u_t}{|x|^2} - \Delta u + u = |u|^{p-1} u$$

$$(x,t) \in \Omega \times (0,T), \quad 1 < p < \frac{N+2}{N-2} \tag{1}$$

$$u(x,0) = u_0(x) \geqslant 0$$

$$x \in \Omega \tag{2}$$

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial n} = 0$$

收稿日期：2005-10-10
基金项目：浙江科技学院科研基金项目(ZF200409)
作者简介：周小燕(1976—　)，女，浙江萧山人，讲师，硕士，主要从事应用偏微分方程的研究。

$$(x,t)\in\partial\Omega\times(0,T) \tag{3}$$

Ω 是 $R^N(N\geqslant 3)$ 中的包含原点的有界区域，$\boldsymbol{n}$ 是边界上的外法向。令 $Q_T=\Omega\times(0,T)$。

1 基本概念和主要结果

定义 1 称函数 u 是式(1)(2)(3) 在 Q_T 上的一个弱解，若 $u\in L^\infty(0,T;H^1(\Omega))$，$\int_0^T\int_\Omega\frac{(u_t)^2}{|x|^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}t<\infty$，且在弱意义下满足式(1)，(2)，(3)。

能量泛函 $E(u)$ 定义为：

$$E(u)=\frac{1}{2}\int_\Omega u^2\mathrm{d}x+\frac{1}{2}\int_\Omega|\nabla u|^2\mathrm{d}x-\frac{1}{p+1}\int_\Omega|u|^{p+1}\mathrm{d}x。$$

引理 1 如果 $1<p\leqslant\frac{N+2}{N-2}$，存在 Sobolev 嵌入 $H^1(\Omega)\subset L^{p+1}(\Omega)$。定义 C：

$$C=\sup_{\substack{u\in H^1(\Omega)\\ u\neq 0\\ \|u\|_{H^1}=1}}\|u\|_{p+1}^2,$$

这里常数 C 仅依赖于 Ω,N,p，则有 $\|u\|_{H^1}^2\geqslant S\|u\|_{p+1}^2$，其中 $S=\frac{1}{C}$。

定义 2 定义稳定集 $\sum$：

$$\sum=\left\{u\mid u\in H^1(\Omega),E(u)<\frac{p-1}{4(p+1)}S^{\frac{p+1}{p-1}},\int_\Omega|u|^{p+1}\mathrm{d}x<\frac{1}{2}S^{\frac{p+1}{p-1}}\right\}。$$

引理 2[3] 如果 $u_0(x)\in\sum$，那么方程有一个整体弱解 $u(x,t;u_0)$；并且存在 $\beta>0$，使得 $\|u\|_{H^1}^2=O(e^{-\beta t})(t\to\infty)$。

定理 设 $u_0(x)\in\sum$，$u(x,t;u_0)$ 是方程的整体解，则对 $\forall q(2\leqslant q<+\infty)$，及 $\forall t_0>0$，有 $u\in L^q(\Omega\times(t_0,\infty))$，且 $\|u\|_{L^q(\Omega\times(t_0,\infty))}\leqslant C$，这里的 C 依赖于 n,q,t_0,Ω。特别对 $\forall t\geqslant t_0>0$，u 是方程的古典解。

2 定理证明

设 $\Psi(x,t)=u^{2m+1}\eta^2$，$m\geqslant 0$ 待定。对任意一给定的 $t_0>0$，$T>0$，取 $\eta\in C^\infty(0,T)$，满足 $0\leqslant\eta\leqslant 1$，$t\in(0,T)$；$\eta=1$，$t\in[t_0,T]$；$\eta=0$，$t\in[0,\frac{t_0}{2}]$；$|\eta_t|<\frac{1}{t_0}$。把 $\Psi(x,t)=u^{2m+1}\eta^2$ 作为定义 1 的检验函数，这里的 $m\geqslant 0$ 待定，则

$$\int_0^T\int_\Omega\left(\frac{u_t}{|x|^2}-\nabla u+u-|u|^{p-1}u\right)\Psi(x,t)\mathrm{d}x\mathrm{d}t=0$$

即

$$\int_0^T\int_\Omega\left(\frac{\Psi u_t}{|x|^2}+\nabla u\nabla\Psi+u\Psi-\Psi u^p\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}t=0 \tag{4}$$

假设 $u\in L^{2m+2}(Q_t)$，那么式(4) 左边第一项估计如下：

$$\int_0^T\int_\Omega\frac{\Psi u_t}{|x|^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}t=\frac{1}{2m+2}\int_0^T\int_\Omega\left(\frac{u^{2m+2}\eta^2}{|x|^2}\right)_t\mathrm{d}x\mathrm{d}t-\frac{1}{m+1}\int_0^T\int_\Omega\frac{u^{2m+2}\eta\eta_t}{|x|^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}t。$$

式(4) 左边第二项估计如下：

$$\int_0^T\int_\Omega\nabla u\nabla\Psi\mathrm{d}x\mathrm{d}t=\frac{2m+1}{(m+1)^2}\int_0^T\int_\Omega|\nabla u^{m+1}|^2\eta^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t\geqslant\frac{1}{m+1}\int_0^T\int_\Omega|\nabla u^{m+1}|^2\eta^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t。$$

式(4) 左边第四项估计如下：

$$\begin{aligned}
&\int_0^T\int_\Omega\Psi u^p\mathrm{d}x\mathrm{d}t=\int_0^T\int_\Omega u^{2m+2}\eta^2u^{p-1}\mathrm{d}x\mathrm{d}t\\
&\leqslant M\int_0^T\int_{(|u|^{p-1}<M)}u^{2m+2}\eta^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t\\
&+\int_0^T\eta^2\left[\int_{(u^{p-1}\geqslant M)}(u^{p-1})^{\frac{p+1}{p-1}}\mathrm{d}x\right]^{\frac{p-1}{p+1}}\left[\int_\Omega|u^{2m+2}|^{\frac{p+1}{2}}\mathrm{d}x\right]^{\frac{2}{p+1}}\mathrm{d}t\\
&\leqslant M\int_0^T\int_\Omega u^{2m+2}\eta^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t\\
&+\sup_t\left[\int_{(u^{p-1}\geqslant M)}u^{p+1}\mathrm{d}x\right]^{\frac{p-1}{p+1}}\int_0^T\eta^2\|u^{m+1}\|_{p+1}^2\mathrm{d}t\\
&\leqslant M\int_0^T\int_\Omega u^{2m+2}\eta^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t\\
&+C\sup_t\left[\int_{(u^{p-1}\geqslant M)}u^{p+1}\mathrm{d}x\right]^{\frac{p-1}{p+1}}\int_0^T\eta^2\int_\Omega(|u^{m+1}|^2+|\nabla u^{m+1}|^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}t。
\end{aligned}$$

所以，

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2m+2}\sup_t\int_\Omega u^{2m+2}\eta^2\mathrm{d}x+\frac{1}{m+1}\int_0^T\int_\Omega|\nabla u^{m+1}|^2\eta^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t\\
&\leqslant\frac{1}{m+1}\int_0^T\int_\Omega u^{2m+2}\eta\eta_t\mathrm{d}x\mathrm{d}t+(M-1)\int_0^T\int_\Omega u^{2m+2}\eta^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t\\
&+C\sup_t\left[\int_{(u^{p-1}\geqslant M)}u^{p+1}\mathrm{d}x\right]^{\frac{p-1}{p+1}}\int_0^T\eta^2\int_\Omega(|u^{m+1}|^2+|\nabla u^{m+1}|^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}t。
\end{aligned}$$

设 $\varepsilon(M)=C\sup_t\left[\int_{(u^{p-1}\geqslant M)}u^{p+1}\mathrm{d}x\right]^{\frac{p-1}{p+1}}$，下证 $\varepsilon(M)\to 0(M\to\infty)$。事实上，设 $g(t)=\int_\Omega|u|^{p+1}\mathrm{d}x$，

$g_M(t)=\int_{(u^{p-1}\geqslant M)}|u|^{p+1}\mathrm{d}x$。由极限的定义知，只需证明 $\forall\varepsilon>0,\exists M_0>0$, s. t. $g_M(t)<\varepsilon$(当 $M>M_0,t\in[0,\infty)$)。而由于存在 $\beta>0$，使得 $\|u\|_{H^1}^2=O(e^{-\beta t})$ $(t\to\infty)$，所以存在 T，使得 $t>T$ 时，$g_M(t)\leqslant g(t)<\varepsilon$。下面还需证明 $g_M(t)<\varepsilon$(当 $M>M_0,t\in[0,T]$)。事实上，由 Weissler[4] 知，$u\in C([0,T];H^1(\Omega))$，所以 $g(t)\in C[0,T]$，即 $g(t)$ 在 $[0,T]$ 一致连续，因此得证。

下面做 L^q 估计。令 $m_0=0,m_i+1=(m_{i-1}+1)(1+\frac{p-1}{p+1})$。对 $i\geqslant 1$，对给定的 $q(1\leqslant q<\infty)$，存在一个 i_0，使得 $2(m_{i_0-1}+1)<q\leqslant 2(m_{i_0}+1)=2(m_{i_0-1}+1)(1+\frac{p-1}{p+1})$。取 M，使得 $\varepsilon(M)=\frac{1}{q}<\frac{1}{2(m_{i_0}+1)}$，可得：

$$\frac{1}{2m+2}\sup_t\int_\Omega\frac{u^{2m+2}\eta^2}{|x|^2}\mathrm{d}x+(\frac{1}{m+1}-\frac{1}{q})\int_0^T\int_\Omega|\nabla u^{m+1}|^2\eta^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t\leqslant\frac{1}{m+1}\int_0^T\int_\Omega\frac{u^{2m+2}\eta\eta_t}{|x|^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}t+(M-1+\frac{1}{q})\int_0^T\int_\Omega u^{2m+2}\eta^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t。$$

又有

$$\begin{aligned}&\int_0^T\int_\Omega u^{(2m+2)(1+\frac{p-1}{p+1})}\eta^{2(1+\frac{p-1}{p+1})}\mathrm{d}x\mathrm{d}t\\
&\leqslant\int_0^T\Big[\int_\Omega(u^{2m+2}\eta^2)^{\frac{p+1}{2}}\mathrm{d}x\Big]^{\frac{2}{p+1}}\Big[\int_\Omega u^{2m+2}\eta^2\mathrm{d}x\Big]^{\frac{p-1}{p+1}}\mathrm{d}t\\
&=\int_0^T\|u^{m+1}\eta\|_{p+1}^2\Big[\int_\Omega u^{2m+2}\eta^2\mathrm{d}x\Big]^{\frac{p-1}{p+1}}\mathrm{d}t\\
&\leqslant\Big[\sup_t\int_\Omega u^{2m+2}\eta^2\mathrm{d}x\Big]^{\frac{p-1}{p+1}}\int_0^T\|u^{m+1}\eta\|_{p+1}^2\mathrm{d}t\\
&\leqslant C\Big(\int_0^T\int_\Omega u^{2m+2}\eta^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t\Big)^{\frac{p-1}{p+1}}\Big(\int_0^T\int_\Omega u^{2m+2}\eta^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t\\
&\quad+\int_0^T\int_\Omega|\nabla u^{m+1}|^2\eta^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t\Big)\\
&\leqslant C\Big(\int_0^T\int_\Omega u^{2m+2}\eta^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t\Big)^{1+\frac{p-1}{p+1}}\end{aligned}$$

这里的 C 依赖于 n,m,t_0,q,Ω，取 $m_0=0$，迭代上面二式直到 $m=m_{i_0}$，可得 $\|u\|_{L^q(\Omega\times(t_0,\infty))}\leqslant C$。从而 $u\in W_q^{2,1}(Q_\infty)$(对任意给定的 $q(2\leqslant q<\infty)$)，这里 $Q_\infty=\Omega\times[t_0,\infty)$。运用抛物方程的正则性理论得到 $u\in C^{2+\alpha,2-\alpha}(Q_\infty)$，从而对所有的 $t\geqslant t_0>0$，u 是古典解。

参考文献：

[1] TAN Zhong. Global Solution and Blow up of Semi-linear Heat Equation with Critical Sobolev Exponent[J]. Commun in PDE, 2001,26(3):717-741.

[2] 王培林.具有 Neumann 边界条件及临界 Sobolev 指数的半线性抛物方程整体解的渐近性及估计[J].厦门大学学报:自然科学版,2004,43(1):17-20.

[3] 周小燕.一类半线性抛物方程的弱解存在性和渐近估计[J].杭州电子科技大学学报,2005,25(3):93-96.

[4] WEISSLER F B. Local Existence and Nonexistence for Semilinear Parabolic Equations in L^p[J]. Indiana Uni Math J,1980,29:79-102.