

一种求解时变条件下双目标最短路的算法

陈建芳

(绍兴托普信息职业技术学院 院长办公室,浙江 绍兴 312000)

摘 要: 在组合优化过程中,往往需要获得从起点到终点之间的最短路,有时需要同时考虑两个目标,而这些目标可能会随着时间的变化而变化。为此,提出了一种利用标号法获得时变条件下双目标最短路的算法,考虑了不同的出发时间的情况,并对算法的复杂性进行了分析,最后给出了一个应用算例。

关键词: 最短路;双目标;时变;运输网络

中图分类号: O29

文献标识码: A

文章编号: 1671-8798(2006)04-0245-05

Approach for Bi-Objective Shortest Path with Time-Varying

CHEN Jian-fang

(Shaoxin Top Infor. Career Tech. College, Zhejiang Shaoxin, 312000 China)

Abstract: Shortest path problem is a basic problem in the combinatorial optimization. In general, two objective will be considered in the transportation and the objectives are time-varying. The author developed the algorithm for the two objectives shortest path with time-varying by using the labelling approach, gave the algorithm to the problem with defferent start time, and dicussed the computational comlexity of the algorithm. At last, a case was studied.

Key words: shortest path; bi-objective; time-varying; network

利用标号法求解时变条件下单目标最短路的算法,笔者已作了详细的论述^[1]。然而,在求解最短路时,有时需要同时考虑多个目标,比如成本、时间、风险、安全性等。Current et al. 对于多目标最短路问题的研究现状进行了分类和概括^[2]。一般的,对于多目标的最短路算法,通常的处理方法是对不同的目标进行线性加权或是将某些目标转化为约束条件。但是,对于线性加权法而言,其权重的确定是一件很困难的事情。而对于有约束的最短路问题,已经被证明是 NP 完全问题,有时甚至因为计算复杂

性太高而无法进行求解。

为了解决双目标最短路问题,Current J, Revelle C, Cohon J^[3] 和 Coutinaho-Rodrigues J, Climcao J, Current J^[4] 提出了交互式算法。Hansen^[5], Climaco 和 Martins^[6] 对于获得多目标有效路径也进行了一定的研究。但这些算法所考虑的是静态的情况,没有考虑目标值的变化。在实际的运输网络中,对于考虑的目标,如时间、风险等,可能是一个与时间相关的变量。本文提出了一种在时变条件下获得双目标最短路的方法,并对算法的计算复杂性进行了分析。

收稿日期: 2006-11-21

作者简介: 陈建芳(1965—),男,浙江绍兴人,高级讲师,主要从事应用数学研究。

1 问题描述及模型

对于时变网络下的双目标最短路问题,一般可以描述为:对于网络 $G = (N, E)$, E 为节点间的有向边的集合, N 为节点集, $|N| = n$, $|E| = m$ 。在此,令 $z_1(i, j, t_i)$ 和 $z_2(i, j, t_i)$ 为在时间 t_i 从节点 i 出发,节点 i 和节点 j 之间的目标 1 的值和目标 2 的值, $z_1(i, j, t_i)$ 和 $z_2(i, j, t_i)$ 均为一个非负的实数, $(i, j) \in E$ 。 $t(i, j, t_i)$ 为在时间 t_i 从节点 i 出发,节点 i 到节点 j 之间所需的时间, $t(i, j, t_i)$ 为一个整数, $(i, j) \in E$ 。 $U(O)$ 为车辆从起点 O 允许出发的离散时间的集合, $|U(O)| = U$, u 为整数, $u \in U(O)$ 。求在时间 T (T 为整数) 之前到达终点 D , 从起点 O 到终点 D 之间的最短路。

为了得到时变网络下的双目标路径选择模型, 首先定义如下变量:

$$y_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{从节点 } i \text{ 到节点 } j \text{ 之间存在运输任务} \\ 0, & \text{否则} \end{cases}$$

这样, 对于时变条件下双目标最短路模型 (TVBOSP) 可以描述为:

$$\min Z_1 = \sum_{(i,j)} y_{ij} z_1(i, j, t_i) \quad (1)$$

$$\min Z_2 = \sum_{(i,j)} y_{ij} z_2(i, j, t_i) \quad (2)$$

$$\text{s. t. } \sum_j y_{ij} - \sum_j y_{ji} = \begin{cases} 1 & \text{若 } i = O \\ -1 & \text{若 } i = D \\ 0 & \text{否则} \end{cases} \quad \forall i \in N \quad (3)$$

$$\sum_j y_{ij} \leq 1 \quad \forall i \in N \quad (4)$$

$$y_{ij} \in \{0, 1\} \quad \forall (i, j) \in E \quad (5)$$

2 定义及定理

定义 1 若 $\varphi_{1,u}$ 和 $\varphi_{2,u}$ 为在时间 u 从起点 O 出发, 起点 O 到终点 D 之间的两条路径。若 $Z_1(\varphi_{1,u}) \leq Z_1(\varphi_{2,u})$, $Z_2(\varphi_{1,u}) \leq Z_2(\varphi_{2,u})$, 且至少有一个是严格不等式, 则称在 Pareto 最优的意义下, 起点出发时间为 u 时, 路径 $\varphi_{1,u}$ 有效于路径 $\varphi_{2,u}$ 。

定义 2 若 φ_u 为在时间 u 从起点 O 出发, 从起点 O 到终点 D 之间的一条路径, $Z(\varphi_u)$ 为在时间 u 从起点 O 出发, 从起点 O 到终点 D 之间的路径 φ 的长度, $Z(\varphi_u) = (Z_1(\varphi_u), Z_2(\varphi_u))$ 。若不存在任何一条在时间 u 从起点 O 出发, 从起点 O 到终点 D 之间的路径 φ'_u 有效于 φ_u , 则称 φ_u 为起点出发时间为 u 时

TVBOSP 的有效路径。

定义 3 若 $\varphi_{1,u}$ 为在时间 u 从起点 O 出发, 从起点 O 到终点 D 之间的考虑目标 1 的最短路, $Z_1(\varphi_{1,u})$ 为其目标 1 的值, $\varphi_{2,u}$ 为在时间 u 从起点 O 出发, 从起点 O 到终点 D 之间的考虑目标 2 的最短路, $Z_2(\varphi_{2,u})$ 为其目标 2 的值, 则称 $(Z_1(\varphi_{1,u}), Z_2(\varphi_{2,u}))$ 为起点出发时间为 u 时 TVBOSP 的理想点。且若 $\varphi_{1,u} = \varphi_{2,u}$, 并令 $\varphi_u^* = \varphi_{1,u} = \varphi_{2,u}$, 称 φ_u^* 为起点出发时间为 u 时 TVBOSP 的绝对最短路。

定义 4 若 $\varphi_{1,u}$ 和 $\varphi_{2,u}$ 为在时间 u 从起点 O 出发, 从起点 O 到节点 j 之间的两条可行路径, 且到达节点 j 的时间分别为 $t_{1,j}$ 和 $t_{2,j}$, $Z(\varphi_{1,u}) = (Z_1(\varphi_{1,u}), Z_2(\varphi_{1,u}))$, $Z(\varphi_{2,u}) = (Z_1(\varphi_{2,u}), Z_2(\varphi_{2,u}))$ 。当 $t_{1,j} = t_{2,j}$ 时, 若 $Z_1(\varphi_{1,u}) \leq Z_1(\varphi_{2,u})$, $Z_2(\varphi_{1,u}) \leq Z_2(\varphi_{2,u})$, 且至少有一个是严格不等式, 则在时间 $t_{1,j}$ 或 $t_{2,j}$, 路径 $\varphi_{1,u}$ 有效于 $\varphi_{2,u}$ 。

定理 1 设 $\varphi_{1,u} \in \Gamma_{1,u}^*$, $\varphi_{2,u} \in \Gamma_{2,u}^*$, 其中, $\Gamma_{1,u}^*$ 为在时间 u 从起点 O 出发, 从起点 O 到终点 D 之间的考虑目标 1 的最短路的集合, $\Gamma_{2,u}^*$ 为在时间 u 从起点 O 出发, 从起点 O 到终点 D 之间的考虑目标 2 的最短路的集合。这样, $(Z_1(\varphi_{1,u}), \min Z_2(\varphi_{1,u}))$ 和 $(\min Z_1(\varphi_{2,u}), Z_2(\varphi_{2,u}))$ 均为有效解的集合, 且 $\varphi_{1,u}^*$ 、 $\varphi_{2,u}^*$ 为起点出发时间为 u 时 TVBOSP 的有效路径。

证明: 假设 $(Z_1(\varphi_{1,u}), \min Z_2(\varphi_{1,u}))$ 不是有效解的集合, 这样 $\varphi_{1,u}$ 不是 BOSP 的有效路径。这样, 必然存在路径 φ_u 使得: $Z_1(\varphi_{1,u}) \geq Z_1(\varphi_u)$, $\min Z_2(\varphi_{1,u}) \geq Z_2(\varphi_u)$, 且至少有一个是严格不等式。根据假设, $\varphi_{1,u}$ 为在时间 u 从起点 O 出发, 从起点 O 到终点 D 之间的考虑目标 1 的最短路, 这样要满足 $Z_1(\varphi_{1,u}) \geq Z_1(\varphi_u)$, 则必然有 $\varphi_u \in \Gamma_{1,u}^*$ 。此时有 $Z_1(\varphi_{1,u}) = Z_1(\varphi_u)$ 。由于 φ_u 有效于路径 $\varphi_{1,u}$, 必然有 $\min Z_2(\varphi_{1,u}) > Z_2(\varphi_u)$ 。与假设矛盾。同样, 可以对 $\varphi_{2,u}$ 的情况进行证明。证毕。

由于在实际的求解过程中, 往往很难获得 φ_u^* 这样的绝对最短路, 通常, 只要找到满足决策者需要的有效路径就可以了。

3 算法

3.1 阶段的划分

为了获得时变网络条件下的双目标最短路, 可以应用动态规划来进行求解。一般的, 对于一个运输网络, 在进行求解的过程中, 可以将运输网络网络划分成若干个阶段, 以起点为初始阶段, 按照车辆的行

驶方向,由前向后一个阶段一个阶段地推移,直到最后一个阶段结束为止。

如图1所示的运输网络,在应用动态规划求解其最短路过程中得到的各个阶段以及各个阶段的状态如表1所示。

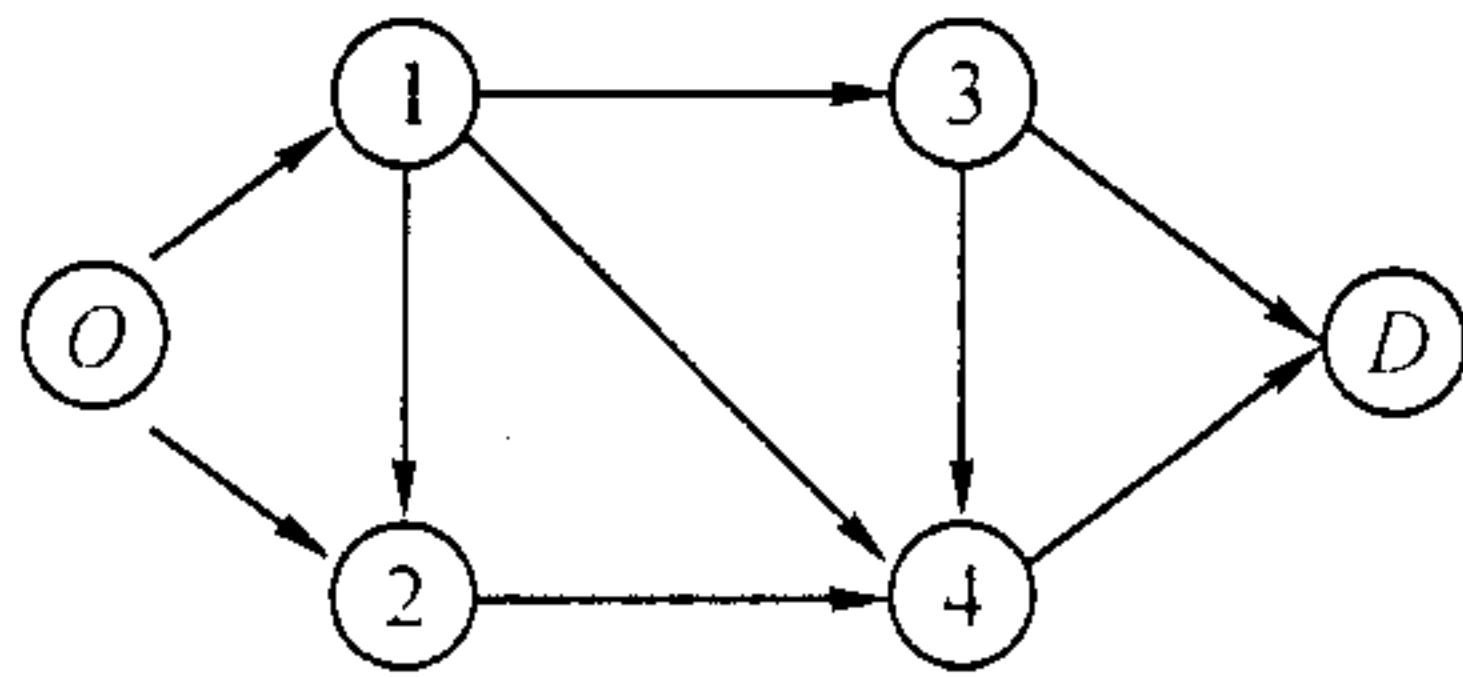


图1 运输网络

表1 各个状态和阶段

	阶段					
	0	1	2	3	4	5
状态	0	1	2	3	4	D
		2	3	4	D	
			4	D		

在确定了阶段和各个阶段所包含的状态之后,就可以得到各个阶段在各个状态下的值。由于不同阶段条件下不同状态的值与其前一个阶段前一个状态的值相关,这样在求解的过程中,还需要考虑其前一个阶段和前一个状态的情况,在此,可以应用标号法,分别标出其所属的阶段、状态、前一个阶段、前一个状态等。同时,在时变条件下,由于下一个阶段和状态与上一个阶段和状态所处的时间有密切的关系,这样在进行标号时,还需要标出其时间。由于在确定阶段、确定状态和确定时间的条件下,其目标值均为一个定量。因此,对于求解从起点O到终点D之间的最短路,可以通过动态规划和标号法,从起点O开始不断地向后一个阶段一个阶段地推移,直到最后一个阶段结束,获得最短路。

3.2 算法

在此,对于任意一个节点 j 均赋有标号 $[(j, z_j^1, z_j^2, t_j), (i, l', q-1)]_{l,q}$,其中 z_j^1 和 z_j^2 表示在时间 t_j 到达节点 j 的目标1和2的值,且 $i \in BS(j)$, $BS(j)$ 为在节点 j 的所有后向节点的集合, $j \in N$, $(i, j) \in E$; l' 表示节点 i 的标号的序号; l 表示节点 j 的标号的序号; q 表示节点 j 的所属的阶段。对于节点 j 中的时间、目标1和2的值,可以通过计算分别获得, $z_{j,l,q}^1 = z_{i,l',q-1}^1 + z_k(i, j, t_i)$, $z_{j,l,q}^2 = z_{i,l',q-1}^2 + z_k(i, j, t_i)$, $t_{j,l,q} = t_{i,l',q-1} + t(i, j, t_i)$, $k=1, 2$ 。其中, $z_{j,l,q}^k$ 表示节点 j 在阶段 q 的第 l 个标号的第 k 个目标值; $z_{i,l',q-1}^k$ 表示节点 i 在阶段 $q-1$ 的第 l' 个标号的第 k 个目标值; $z_k(i, j, t_i)$ 表示在时间 t_i 从节

点 i 出发,节点 i 和节点 j 之间所需的第 k 个目标值,时间 t_i 来自于节点 i 的第 l' 个标号; $t_{j,l,q}$ 表示节点 j 在阶段 q 的第 l 个标号的时间; $t_{i,l',q-1}$ 表示节点 i 在阶段 $q-1$ 的第 l' 个标号的时间; $t(i, j, t_i)$ 表示在时间 t_i 从节点 i 出发,节点 i 和节点 j 之间的所需的时间。

根据给出的定义4,可以在到达时间相同、阶段也相同的情况下,对同一节点的标号进行对比。在此,利用永久标号和临时标号进行处理。首先,对任一节点 j 的标号 $[(j, z_j^1, z_j^2, t_j), (i, l', q-1)]_{l,q}$ 均设为临时标号,然后考察同一阶段 q 节点 j 的任意两个标号 $[(j, z_j^1, z_j^2, t_j), (i, l', q-1)]_{l,q}$ 和 $[(j, z_j^1, z_j^2, t_j), (i, l'_1, q-1)]_{l_1,q}$ 。若有 $t_{j,l,q} = t_{j,l_1,q}$, $z_{j,l,q}^1 \leq z_{j,l_1,q}^1$, $z_{j,l,q}^2 \leq z_{j,l_1,q}^2$,且至少有一个是严格不等式。此时,说明标号 $[(j, z_j^1, z_j^2, t_j), (i, l', q-1)]_{l,q}$ 所对应的路径有效于标号 $[(j, z_j^1, z_j^2, t_j), (i, l'_1, q-1)]_{l_1,q}$ 所对应的路径。删去标号 $[(j, z_j^1, z_j^2, t_j), (i, l'_1, q-1)]_{l_1,q}$,而保留标号 $[(j, z_j^1, z_j^2, t_j), (i, l', q-1)]_{l,q}$ 。当不存在任何一个 $t_{j,l,q} = t_{j,l_1,q}$,此时将所有的节点 j 在阶段 q 的标号设为永久标号, $l, l_1 \in \{1, 2, \dots, r\}$, r 为节点 j 在阶段 q 的最大标号数。特别地,当所有的阶段都已经结束,且 $j = D$ 时,由于不再有下一个阶段,因此不必考虑终点 D 所属的阶段,也不必考虑是否有 $t_{j,l} = t_{j,l_1}$,此时,只需考虑是否存在 $z_{j,l}^1 \leq z_{j,l_1}^1$, $z_{j,l}^2 \leq z_{j,l_1}^2$,且至少有一个是严格不等式。通过对比,可以获得终点 D 之间的永久标号,且通过对终点 D 的永久标号进行逆推,即可得到从起点O到终点D之间的有效路径集合。

这样就可以给出求解时变条件下的最短路算法。算法的具体步骤如图2所示。

3.3 算法复杂性分析

定理2 时变网络条件下利用标号法获得最短路的算法的计算复杂性为 $O(UTn^2m)$ 。

证明:对于每一个 $u \in U(O)$ 都有:

首先,获得阶段数目的计算复杂性为 $O(n)$ 。其次对于每一个阶段,对于任何一个节点 $i \in N$,需要获得所有的 $j \in FS(i)$, $(i, j) \in E$,最多为 m 条。同时,在计算的过程中,还需要考虑时间的因素,由于任何两个节点之间的时间均为整数,这样在计算过程中,任何一个节点的可能时间值均不超过 T 个。这样,此时的计算复杂性为 $O(Tnm)$ 。

这样,从总体上考虑,可以得到获得时变条件下的双目标最短路的计算复杂性为 $O(UTn^2m)$ 。

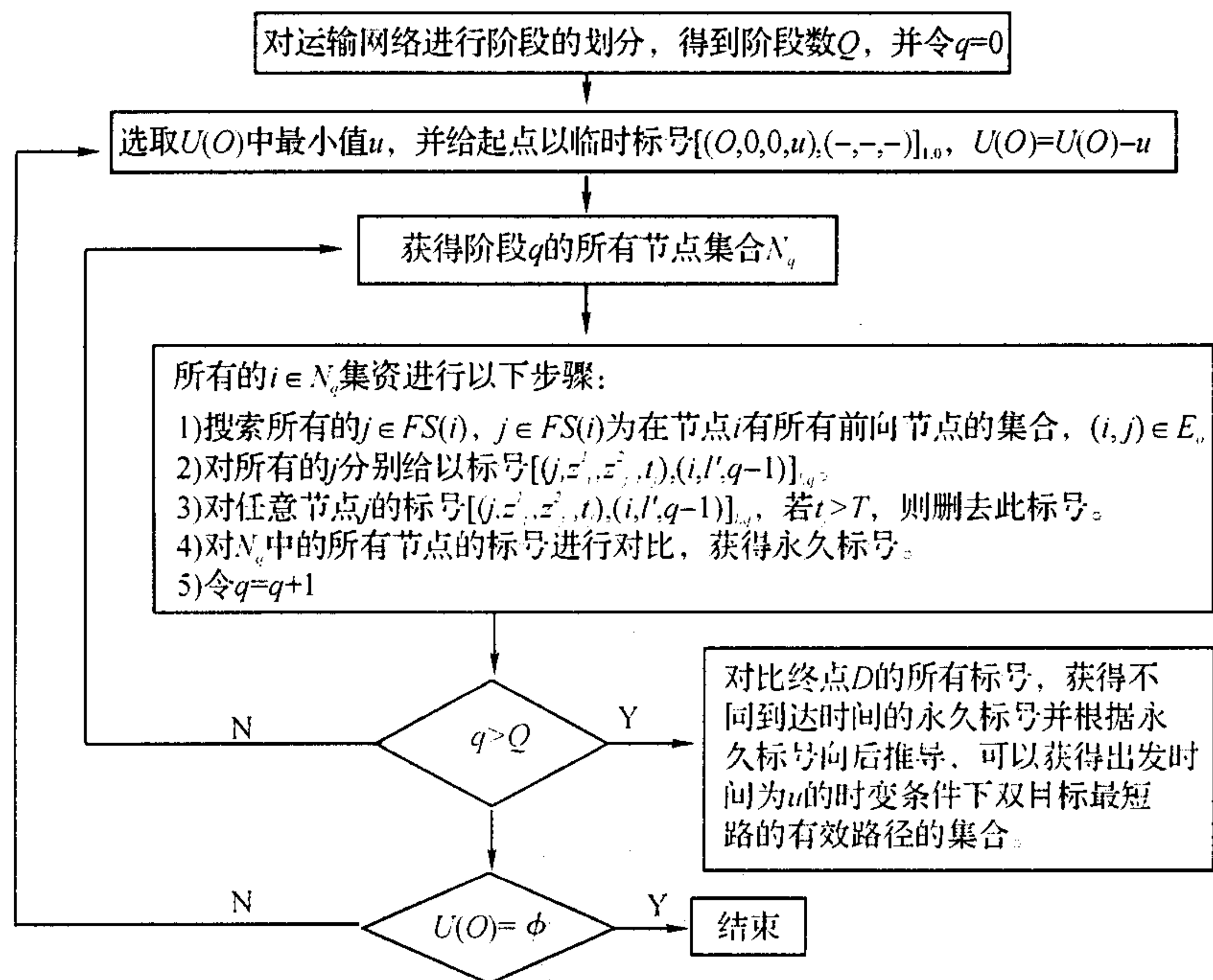


图 2 算法的具体步骤

4 算 例

现给出一个简单的算例。在有害物品运输过程中,通常需要考虑两个目标的最小化:风险和成本,而风险和成本均与时间密切相关。现有运输网络如图 3 所示。表 2 给出了在运输过程中,各个节点之间在不同时间条件下,有害物品运输过程中的运输成本、运输风险和运输时间。假设车辆在时间 0 从起点 O 出发,

并每隔 6 h 整点出发一次,且到达终点 D 的时间不能超过 24。求从起点 O 到终点 D 之间的最短路。

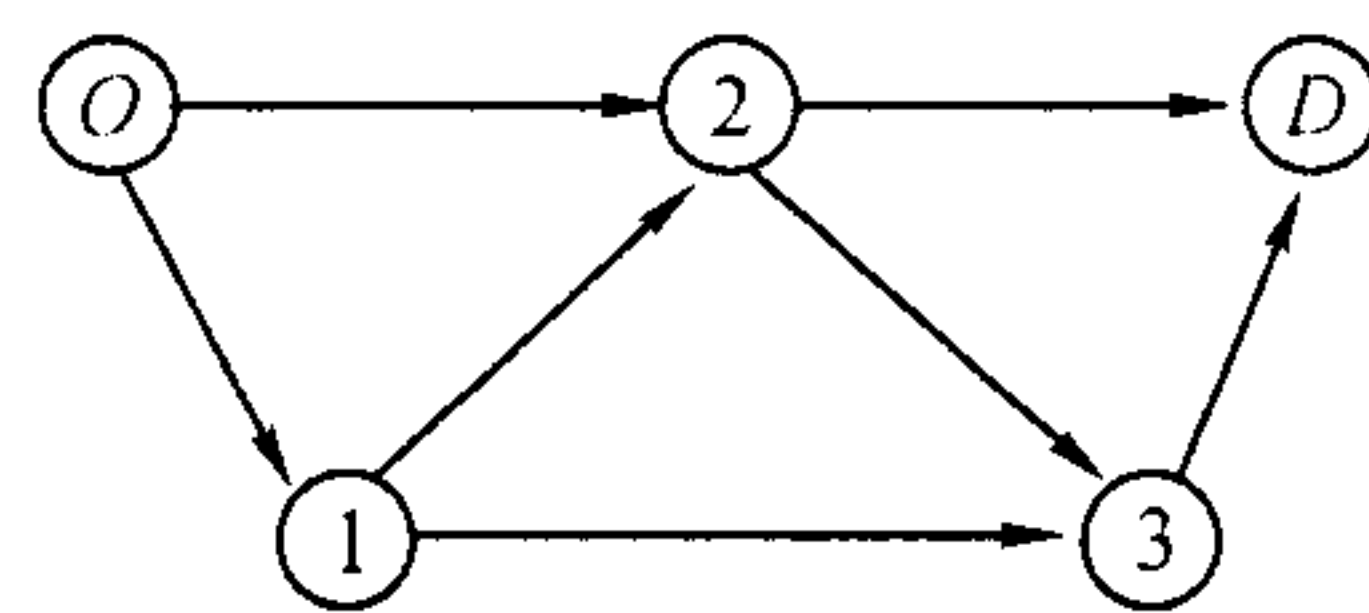


图 3 运输网络

表 2 各条有向边在不同时间条件下的运输成本、运输风险和运输时间

有向边	时 段					
	[0,4)	[4,8)	[8,12)	[12,16)	[16,20)	[20,24)
(O,1)	40/20/4	40/20/4	60/15/3	60/25/3	80/30/2	60/10/1
(O,2)	120/50/8	150/40/8	150/35/6	170/20/8	170/35/8	130/30/9
(1,2)	60/40/4	60/35/4	80/25/5	80/20/5	60/30/5	60/35/6
(1,3)	30/10/3	30/10/3	20/15/3	10/10/4	10/10/4	20/15/3
(2,3)	80/40/6	80/40/6	80/35/6	120/25/5	120/25/5	140/20/4
(2,D)	50/25/3	50/25/3	50/20/2	30/30/2	30/30/2	20/30/3
(3,D)	40/50/5	40/50/5	50/60/5	50/65/6	60/65/5	60/60/6

根据给出的运输网络图,可以得到在求解过程中的各个状态和阶段。如表 3 所示。

表 3 各个状态和阶段

	阶 段				
	0	1	2	3	4
状态	O	1	2	3	D
		2	3	D	
			D		

首先,取出发时间为 0 点,考虑阶段 0 的情况,可以对起点 O 赋以标号 $[(O,0,0,0),(-,-,-)]_{1,0}$ 。

然后,考虑第 1 个阶段,此时与起点 O 相联的节点为节点 1 和 2。可以得到节点 1 和 2 的第 1 标号分别为 $[(1,40,20,4),(O,1,0)]_{1,1}$ 和 $[(2,120,50,8),(O,1,0)]_{1,1}$ 。

考虑第 2 个阶段。先考虑节点 2,由于此时节点 1 和节点 2 之间有有向边相联,这样可以得到节点 2 的第 1 个标号 $[(2,100,55,8),(1,1,1)]_{1,2}$ 。然后考

考虑节点 3, 节点 3 分别与节点 1 和节点 2 相联, 可以得到节点 3 的第 1 和 2 个标号分别为 $[(3, 70, 30, 7), (1, 1, 1)]_{1,2}$ 和 $[(3, 200, 85, 14), (2, 1, 1)]_{2,2}$ 。同时节点 2 和终点 D 相联, 可以得到终点 D 的第 1 个标号 $[(2, 170, 70, 10), (2, 1, 1)]_{1,2}$ 。

考虑第 3 个阶段。先考虑节点 3, 与节点 2 相联, 可以得到节点 3 的第 1 个标号 $[(3, 180, 90, 14), (2, 1, 2)]_{1,3}$ 。然后考虑节点终点 D , 节点 2 和终点 D 相

联, 可以得到终点 D 的第 1 个标号 $[(D, 150, 75, 10), (2, 1, 2)]_{1,3}$, 同时节点 3 也与终点 D 相联, 可以得到终点 D 的第 2 和 3 个标号 $[(D, 110, 80, 12), (3, 1, 2)]_{2,3}$ 和 $[(D, 250, 120, 20), (3, 2, 2)]_{3,3}$ 。

考虑第 4 个阶段。此时只有一个终点 D , 与节点 3 相联, 可以得到终点 D 的第 1 个标号 $[(D, 230, 115, 20), (3, 1, 3)]_{1,4}$ 。结束。此时, 可以得到各个节点的标号情况, 如表 4 所示。

表 4 各个节点的标号

节 点	1	2	3	4	5
O	$[(0, 0, 0, 0), (-, -, -)]_{1,0^p}$				
1	$[(1, 40, 20, 4), (0, 1, 0)]_{1,1^p}$				
2	$[(2, 120, 50, 8), (0, 1, 0)]_{1,1^p} \quad [(2, 100, 55, 8), (1, 1, 1)]_{1,2^p}$				
3	$[(3, 70, 30, 7), (1, 1, 1)]_{1,2^p} \quad [(3, 200, 85, 14), (2, 1, 1)]_{2,2^p} \quad [(3, 180, 90, 14), (2, 2, 2)]_{1,3^p}$				
D	$[(D, 170, 70, 10), (2, 1, 1)]_{1,2^p} \quad [(D, 150, 75, 10), (2, 1, 2)]_{1,3^p} \quad [(D, 110, 80, 12), (3, 1, 2)]_{2,3^p} \quad [(D, 250, 110, 20), (3, 2, 2)]_{3,3^p} \quad [(D, 230, 115, 20), (3, 1, 3)]_{1,4^p}$				

注: p 为永久标号; t 为临时标号。

这样, 通过对终点 D 的标号进行对比, 可以得到终点 D 的永久标号, 通过对永久标号的向后递推, 可以获得在时间 0 出发的有效路径分别为: $O, 2, D, O, 1, 2, D$ 和 $O, 1, 3, D$ 。

同样的, 分别选取不同的出发时间, 并应用给出的算法, 可以获得在不同出发时间条件下的最短路。分别如表 5 和 6 所示。

表 5 不同出发时间条件下的有效路径

出发时间	有效路径		
0	$O, 2, D$	$O, 1, 2, D$	$O, 1, 3, D$
6	$O, 2, D$	$O, 1, 2, D$	$O, 1, 3, D$
12	$O, 1, 2, D$	$O, 1, 3, D$	—
18	—	—	—

表 6 不同出发时间条件下的有效路径的目标值

出发时间	有效路径		
0	(170, 70)	(150, 75)	(110, 80)
6	(180, 70)	(150, 75)	(110, 90)
12	(190, 50)	(130, 100)	—
18	—	—	—

从表 5 和 6 中可以看出, 不同出发时间条件下, 有效路径有所不同。当出发时间为 18 时, 由于到达终点 D 的时间超过了所给出的时间限制, 此时无可行路径。

5 结 语

由于时间因素可能同时影响两个目标值, 决策

者要进行选择相对比较困难。利用标号法求解双目标最短路, 可以获得多条有效路径, 同时, 还考虑了不同出发时间下的情况。决策者可以根据自身的情况对这些有效路径进行比较, 选择合适的出发时间和路径。此算法还可以推广到超过两个目标的时变条件下的多目标最短路问题。

参考文献:

[1] 陈建芳. 一种求解时变条件下最短路的算法[J]. 绍兴文理学院学报: 自然科学版, 2006, 26(2): 33-37.

[2] CURRENT J, MARSH M. Multiobjective transportation network design and routing problems: taxonomy and annotation[J]. European Journal of Operational Research, 1993, 65: 1-15

[3] CURRENT J, REVELLE C, COHON J. An interactive approach to indentify the best compromise solution for two objective shortest path problems[J]. Computer & Ops Res, 1990, 17(2): 187-198.

[4] COUTINHO-RODRIGUES J, CLIMCAO J, CURRENT J. An interactive bi-objective shortest path approach: search for unsupported nondominated solutions[J]. Computer & Ops Res, 1999, 26: 789-798.

[5] HANSEN. Bicriterion Path Problems[C]// FANDEL G, GAL T. Multiple Criteria Decision Making Theory and Application, Proceedings, 1979: 109-127.

[6] CLIMACO, MARTINS. A bicriterion shortest path algorithm[J]. European Journal of Operational Research, 1982(11): 399-404.