

## 部分相干空间孤子的频移

钦小平<sup>1</sup>,姚 旻<sup>2</sup>,徐德猛<sup>3</sup>

(1. 浙江科技学院 理学院,杭州 310023;2. 浙江教育学院 理工学院,杭州 310012;3. 浙江大学 光学研究所,杭州 310027)

**摘 要:** 以部分相干的高斯-谢尔模空间光孤子非线性折射率呈对数分布的介质中的传输理论为基础,详细分析了当考虑频谱分布有一定线宽时,频谱的相对中心频移演化特性,并且对考虑频谱分布后孤子的稳定性进行了相应的分析。分析表明,相对频移随传输距离的演化呈准周期出现,而考虑频移后,原本稳定的空间孤子在演化过程中也呈现准周期的振荡,并且孤子相对半径的演化规律与相对频移的演化规律恰好相反。

**关键词:** 高斯-谢尔模;光孤子;频移;准周期

中图分类号: O433

文献标识码: A

文章编号: 1671-8798(2006)04-0250-04

## Spectral Shift of Partially Coherent Spatial Soliton

QIN Xiao-ping<sup>1</sup>, YAO Min<sup>2</sup>, XU De-meng<sup>3</sup>

(1. School of Science, Zhejiang University of Science and Technology, Hangzhou 310023, China;

2. College of Science and Technology, Zhejiang Education Institute, Hangzhou 310012, China;

3. Institute of Optics, Zhejiang University, Hangzhou 310027, China)

**Abstract:** Based on the transport theory of partially coherent Gaussian Shell model (GSM) spatial photonic soliton in the media with logarithmic-distributed nonlinear refraction rate, the evolvement properties of relatively centric spectral shift of the frequency spectrum is analyzed at length when there is line breadth of spectrum distribution. Then the stability of soliton is also discussed when the spectrum distribution is considered. The results show the quasi-periodic appearance of the relative spectral shift with the transport distance. When the spectral shift is considered, the stable soliton turns to oscillate quasi-periodically in the process of evolvement. Furthermore, the evolvement of the relative radii of soliton is contrary to that of relative spectral shift.

**Key words:** Gaussian Shell model (GSM); soliton; spectral shift; quasi-periodically

频移现象作为部分相干光特殊性质之一,从其发现以来<sup>[1]</sup>,一直成为人们研究的热点。作为部分相干光的一种特殊模式,高斯-谢尔模在许多方面类似高斯光束,因而一直是人们研究的热点<sup>[2]</sup>。最近,

Lin 等人更是利用张量及其变换的方法,描述了扭曲且非轴对称的高斯-谢尔模在线性介质中的传输<sup>[3]</sup>。并且以此方法研究了高斯-谢尔模在自由空间的传输<sup>[4]</sup>。近 30 年,对于非线性介质中光孤子的

收稿日期: 2006-10-16

作者简介: 钦小平(1979—),男,浙江长兴人,助教,硕士,主要从事理论物理与数值计算研究。

传输一直是研究的热点之一。特别是在实验中利用光折变晶体成功产生空间光孤子后<sup>[5]</sup>,部分相干空间光孤子的研究引起人们广泛的关注。最近,人们在折射率成对数型分布的非线性介质中求得了解析的稳定孤子解<sup>[6]</sup>。这种介质中,部分相干空间光孤子相关函数演化方程具有高斯-谢尔模形式的解,并且稳定的孤子解只是其中的特例<sup>[7]</sup>。

根据可查的文献表明,目前对于空间光孤子的研究均一律假定光束为单一频率,非单色的空间部分相干光孤子没有相关的研究报道。然而,激光在严格意义上是非单色的。因此,有必要对非单色空间光孤子的频谱演化稳定性进行相关的研究。本文正是在原有的单色高斯-谢尔模形式孤子解的基础上<sup>[7]</sup>,考虑有频谱分布后,部分相干光孤子在折射率成对数型分布的非线性介质中的频谱演化特性,以及由此产生的对光孤子在传输过程中演化特性的影响。分析表明,由于非单色的原因,在光孤子传输过程中频谱产生移动,而且当考虑频移的影响后,光孤子的稳定性遭到破坏。

## 1 基础理论

电场  $E = \psi \exp(ikn_0 z)$  所满足的非线性薛定谔方程为:

$$2i\partial\psi/\partial Z + \nabla_r^2\psi + (\epsilon k)^2(n^2 - n_0^2)\psi = 0, \quad (1)$$

式(1)中,  $n$  是介质的折射率,  $n_0$  是介质的线性折射率,  $k$  为波数。拉普拉斯算符  $\nabla_r^2 = \partial^2/\partial X^2 + \partial^2/\partial Y^2$ , 参数  $X, Y, Z$  满足变量代换  $X = x/\epsilon, Y = y/\epsilon$  和  $Z = z/(kn_0\epsilon^2)$ 。这里  $\epsilon$  只是一个为了描述方便而取的标量常数,具有长度量纲<sup>[8]</sup>。考虑一种饱和的非线性介质,它的折射率随着光强成对数变化,即:

$$n^2(I) = n_0^2 + n_2 \ln \frac{I}{I_i}, \quad (2)$$

式(2)中,  $n_2$  是一个与介质非线性强度有关的无量纲正数,  $I_i$  是初始光强<sup>[6]</sup>。将式(2)代入式(1)可得:

$$i\frac{\partial\psi}{\partial Z} + \frac{1}{2}\nabla_r^2\psi + m \ln \frac{I}{I_i}\psi = 0. \quad (3)$$

这样,式(3)与文献[7]中的方程(1)一致,其中  $m = \frac{(\epsilon k)^2 n_2}{2} = \frac{(\epsilon n_0)^2 n_2}{2c^2} \omega^2$ 。因此,  $m$  是  $\omega^2$  的函数。

利用文献[7]的有关计算结果可以知道描述部分相干光的互相关函数满足的传输变换方程为:

$$i\frac{\partial\Gamma}{\partial Z} + \nabla_R \cdot \nabla_p \Gamma + m \ln \frac{\Gamma_{11}}{\Gamma_{22}} \Gamma = 0 \quad (4)$$

式(4)中,  $\Gamma$  为互相关函数,它的定义式为<sup>[2]</sup>:

$$\Gamma(r_1, r_2) = \langle \Psi(r_1) \Psi^*(r_2) \rangle, \quad (5)$$

空间变量  $R$  和  $p$  满足变换关系式:

$$R = \frac{1}{2}(r_1 + r_2), p = r_1 - r_2. \quad (6)$$

由文献[7]知道相关函数满足高斯统计,因此当考虑频谱分布时,初始的相关函数可以表示为:

$$\Gamma(R, p, Z=0) = S_0(\omega) \exp\left(-\frac{R^2}{\rho_0^2} - \frac{p^2}{\sigma_0^2}\right), \quad (7)$$

式(7)中,  $R = |R|, p = |p|, \sigma_0$  为有效的相干半径,满足  $1/\sigma_0^2 = 1/r_0^2 + 1/(4\rho_0^2)$ 。  $\rho_0$  和  $r_0$  分别为初始的光束半径和初始的相干半径。  $S_0(\omega)$  为光束的初始频谱分布。因为介质的非线性折射率分布成对数型,所以  $\Gamma(R, p, Z)$  在传输过程中将保持高斯型分布,并且初始的频谱分布将不变。可得到传输后相关函数满足:

$$\begin{aligned} \Gamma(R, p, Z=0) \\ = S_0(\omega) A(Z) \exp\left(-\frac{R^2}{\rho^2(Z)} - \frac{p^2}{\sigma^2(Z)} + i R \cdot p \mu(Z)\right) \end{aligned} \quad (8)$$

式(8)中,  $A(Z)$  和  $\mu(Z)$  表示相关函数的振幅和位相变化,  $\rho(Z)$  和  $\sigma(Z)$  分别是它的半径和有效相干半径。利用初始条件  $A(0) = 1, \rho(0) = \rho_0, \sigma(0) = \sigma_0$  和  $(d\rho/dZ)(Z=0) = 0$ , 将式(8)代入变换方程(4)可得4个参数所满足的方程为:

$$\frac{d^2\rho}{dZ^2} - \frac{4}{\rho^3} \frac{\rho_0^2}{\sigma_0^2} + \frac{2m(\omega_m^2)}{\rho} = 0, \quad (9)$$

$$A(z) = \left[\frac{\rho_0}{\rho(Z)}\right]^2, \quad (10)$$

$$\frac{\sigma}{\rho} = \frac{\sigma_0}{\rho_0}, \quad (11)$$

$$\frac{d\mu}{dZ} = \frac{4}{\sigma^2\rho^2} - \mu^2 - \frac{2m(\omega_m^2)}{\rho^2}. \quad (12)$$

根据方程(9)~(12),可以求得相关函数在非线形折射率成对数分布介质中的变换特性。那么部分相干空间孤子的频谱就可以通过令  $r_1 = r_2$  得到。

假设光束为单色,即  $m(\omega_m^2) = m(\omega_0^2) = m_0$ , 那么所求的问题就完全等价于文献[7]中所讨论的问题。这时根据(9)~(12)式可以求得光束为一个周期变化的部分相干空间孤子,而稳定的孤子解只是其中的特殊情况。引入一个判定空间孤子稳定性的参数,定义为:

$$\Delta = m_0 - \frac{2}{\sigma_0^2}. \quad (13)$$

当满足  $\Delta = 0$ , 那么在非线性介质中就有稳定的空间孤子出现。

当考虑频谱有一定线宽时,假设其初始中心频



率为  $\omega_0$ , 那么对于该频率而言, 稳定性条件成立。然而对于频谱中的其他频率, 稳定性条件被破坏。因此不同的频率所对应的光束半径在传输过程中的变化规律也将各不相同, 同时由式(10)可知, 轴上振幅也将发生相应的变化。这时, 经过传输后的频谱中心频率可能发生变化, 产生所谓的频移效应。由方程(9)可知, 空间孤子的传输规律也将会因为频移效应而发生改变。现通过具体的数值计算, 对这种部分相干空间孤子的频移效应以及由此引起的稳定性变化进行讨论。

## 2 频谱演化特性

为了简单起见, 仅考虑空间孤子的轴上频谱变化, 并且  $m_0$  能满足孤子的稳定条件, 因此光束初始的取值为:  $\rho_0 = 1, r_{c0} = 2$ , 那么根据式(13)可得  $n_{20} = 1$ 。假设初始的频谱分布呈 Lorentz 型, 即:

$$S_0(\omega) = \frac{S_0 \delta^2}{(\omega - \omega_0)^2 + \delta^2}, \quad (14)$$

式(14)中,  $S_0$  是常数,  $\omega_0$  是初始的光谱中心频率,  $\delta$  是光谱的半高宽。

取  $\omega_0 = 3.2 \times 10^{15} \text{ rad/s}$ ,  $\delta = 0.6 \times 10^{15} \text{ rad/s}$ ,  $S_0 = 1$ 。根据式(14), 得到对于不同的初始频谱半高宽, 部分相干空间光孤子相对中心频移随传输距离的变化关系, 如图 1 所示。图中很明显地显示, 随着传输距离的增加, 相对中心频移呈准周期振荡。并且初始的频谱越宽, 频移量越大。当初始的频谱半高宽远小于初始的频谱中心频率时, 孤子可以看作单一频率的光, 这时的频移可以忽略不计。从图中还可以发现, 当初始频谱半高宽与中心频率可比时, 相对中心频移有最大值  $\Delta\omega_{\max}$ 。因为当初始的频谱半高宽与中心频率可比时, 这时的光相当于白光, 因此  $\Delta\omega_{\max}$  的值是唯一的。同时也得到空间光孤子传输后半高宽与初始半高宽比值随着传输距离的变化关系, 如图 2 所示。在计算时采用了与图 1 中相同的初始半高宽。从图 2 中可以看到, 相对中心频移不论是随着传输距离的变化还是由于初始频谱半高宽的不同对它的影响, 均没有特殊的规律。当初始的频谱半高宽远小于初始的频谱中心频率时, 半高宽随着孤子的传输基本不变。其他情况的半高宽的变化范围波动很大。

## 3 频移对空间孤子传输的影响

以上分析了部分相干光孤子在传输过程中相对频移的变化。由分析可知, 由于频谱中心频率的移动,

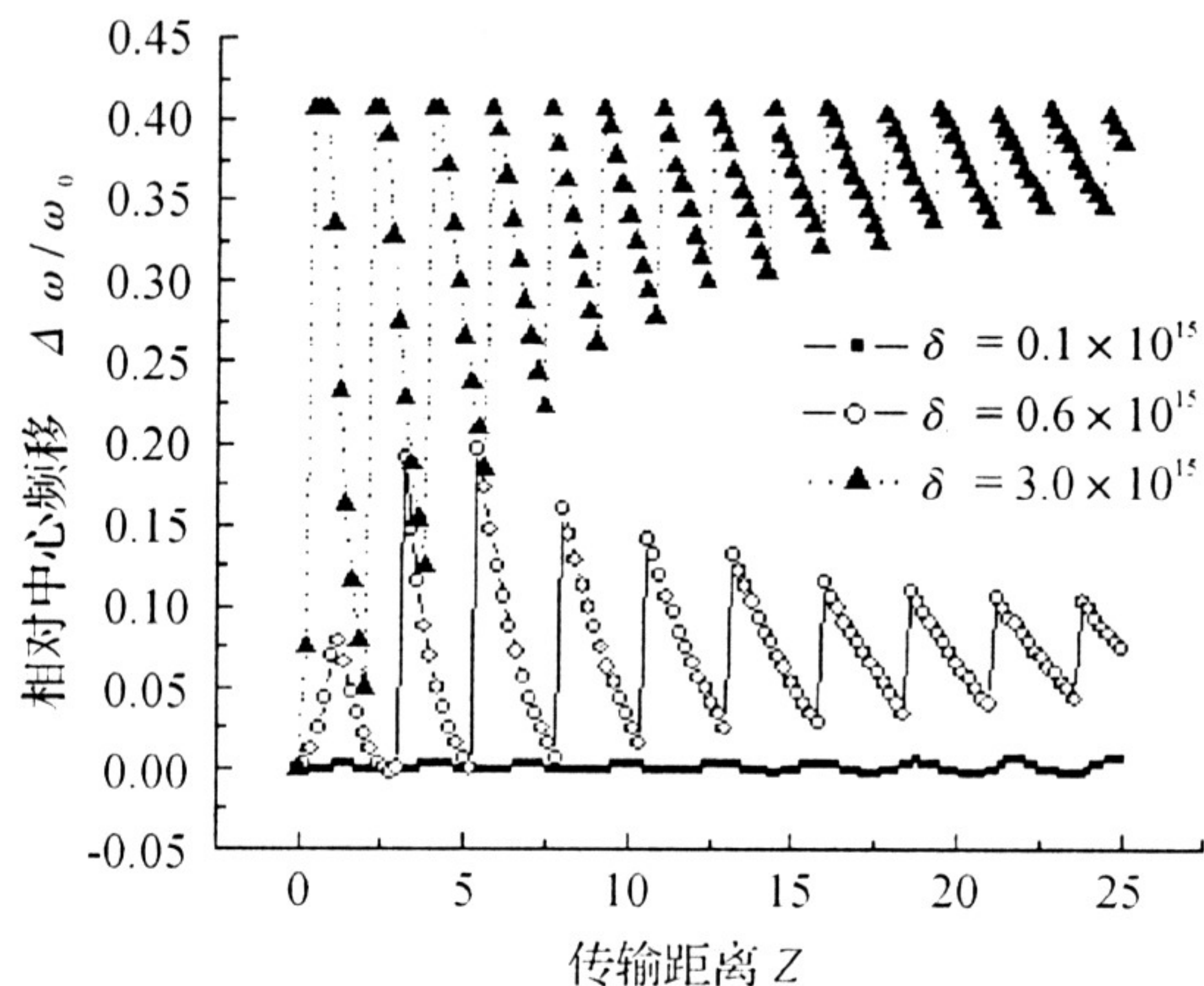


图 1 相对中心频移随传输距离的变化关系

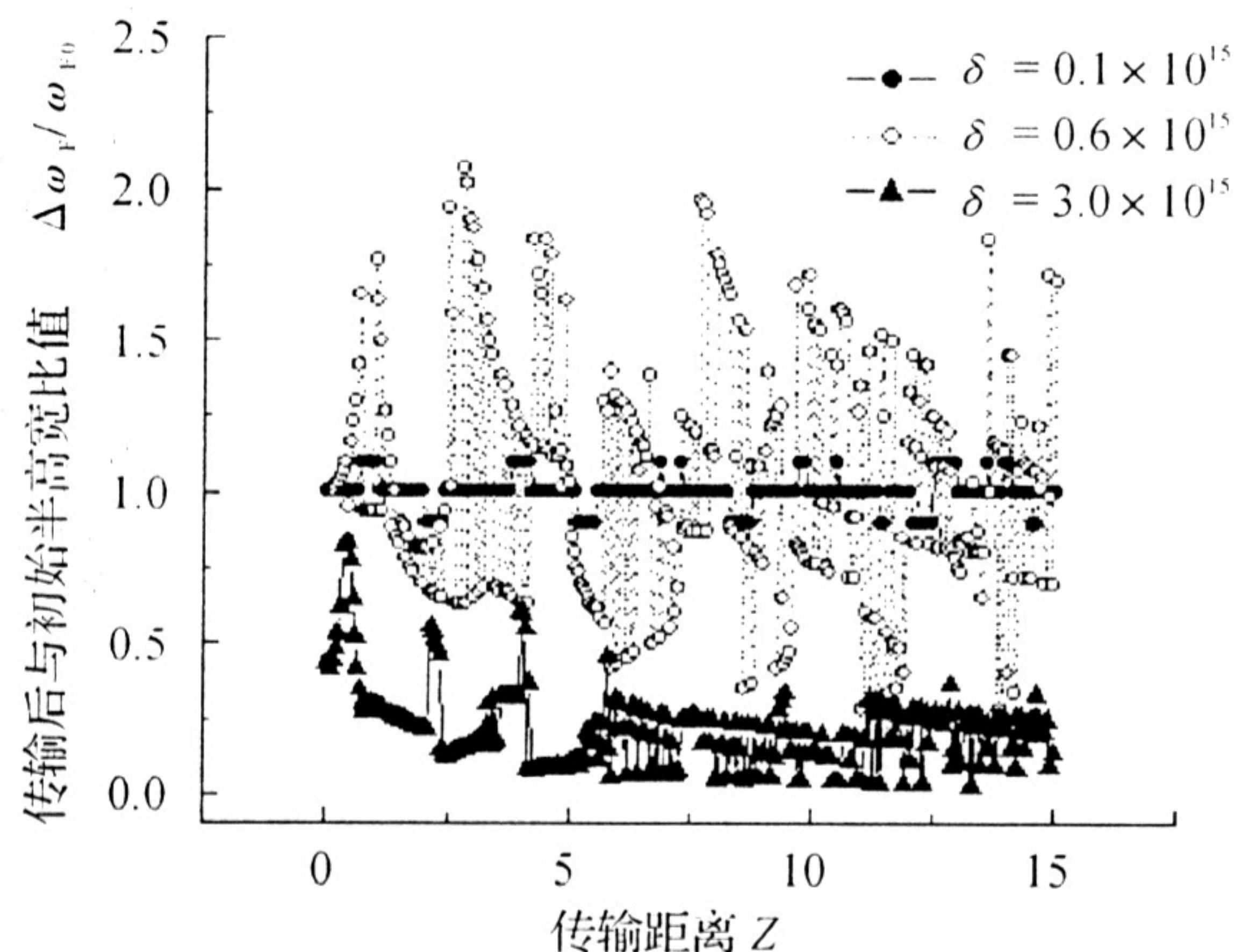


图 2 传输后与初始半高宽比值随着传输距离的变化关系

相应的非线性折射率发生变化, 孤子的稳定性遭到破坏。空间孤子的演化特性与文献[7]中将不同。考虑到空间孤子频谱有一定宽度且孤子开始处于稳定状态, 这时空间孤子光束半径在传输过程中的变化。这里用到的初始值, 如无特殊的说明, 与第 2 节中相同。

根据式(9)和式(14), 得到空间孤子光束相对半径和相对中心频移随传输距离的变化关系, 如图 3 所示。其中频谱的半高宽为  $\delta = 0.6 \times 10^{15}$ 。从图 3 中可以看到, 相对半径随着传输距离也呈现准周期的变化。在与相对频移变化的对比中可以发现两点, 相对半径的变化趋势与相对频移的变化恰好相反, 而它们演化的准周期是完全相同的。演化中相对频移在一个周期中, 频移值先缓慢下降, 然后突然跃变上升至下一个周期的开始, 而两个周期开始的值相差不大。对于相对半径的变化与相对频移地变化正好完全相反。同时也得到不同的初始频谱半高宽, 部分相干空间光孤子相对半径随传输距离的变化关系, 如图 4 所示。在与图 1 的对比中可以看到相对半径的变化与相对



频移地变化是完全相反的。对于同一初始频谱半高宽而言,相对半径与相对频移之间的变化关系与图3一致。对于不同的初始半高宽对半径的影响,它表现为当 $\delta$ 越大,相应的相对半径变化幅度越小。同时当 $\delta$ 与初始的频谱中心频率可比时,相对半径有最小值。

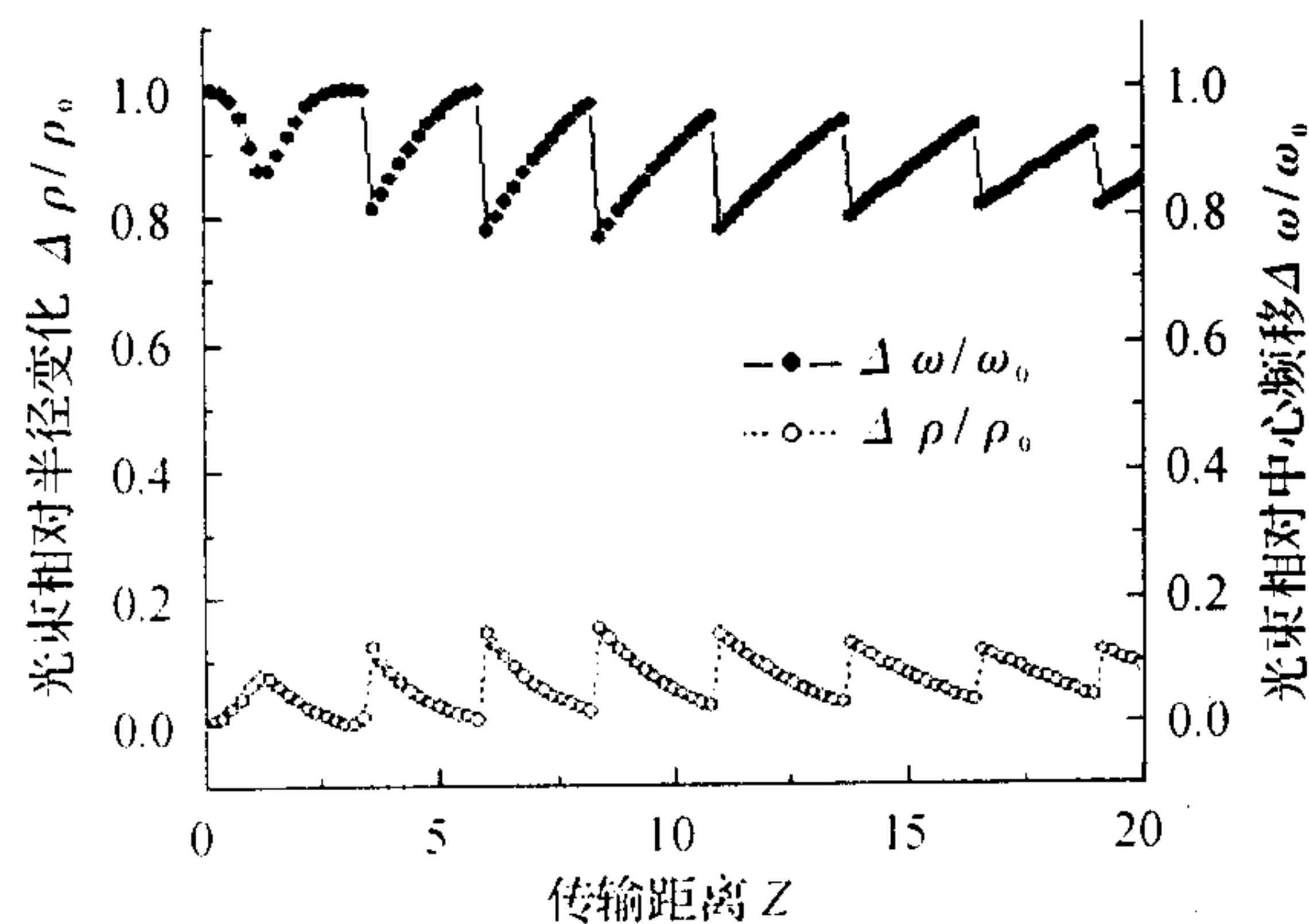


图3 光束相对半径和相对中心频移随传输距离的变化关系

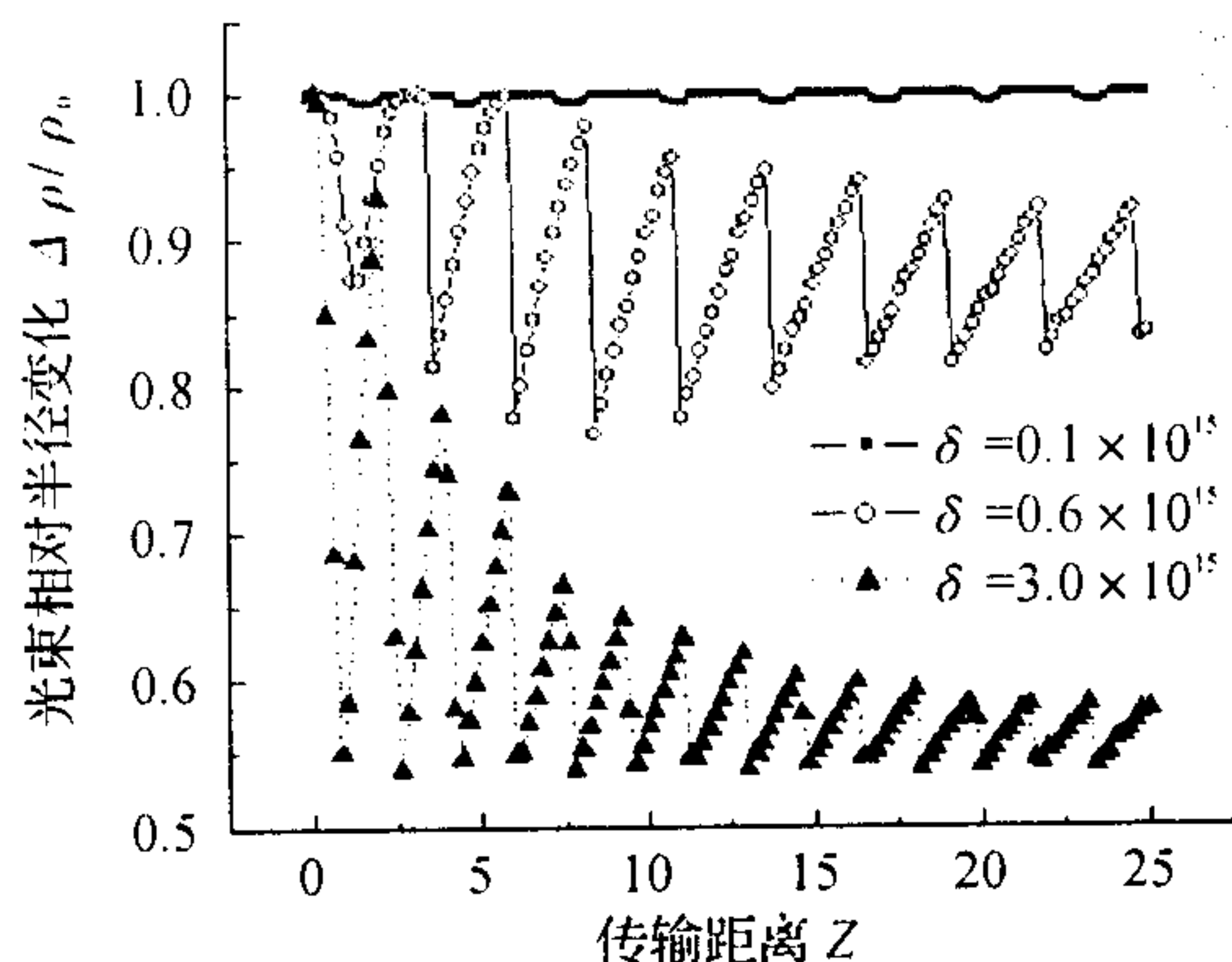


图4 光束相对半径随传输距离的变化关系

#### 4 结 语

综上所述,当考虑在非线性折射率呈对数型分布的介质中可以产生部分相干的高斯-谢尔模模型的空间光孤子,并且当满足一定的条件时,将会产生

稳定的空间光孤子。但是当考虑了光孤子的频谱分布有一定线宽时,在传输过程中就会产生准周期性的频移。由于频移的影响,原本的孤子稳定条件遭到破坏。原本稳定的空间光孤子,在考虑频移后,其光束半径在传输过程中将产生准周期的振荡,并且它的演化的规律与相对频移地演化规律恰好相反。从分析中可以得到这样的结论,只有当频谱的线宽分布足够小时,稳定的高斯-谢尔模型空间光孤子才有可能得到。

#### 参考文献:

- [1] WOLF E. Invariance of the spectrum of light on propagation[J]. Phys Rev Lett, 1986, 56: 1370-1372.
- [2] MANDEL L, WOLF E. Optical Coherence and Quantum Optics [M]. London: Cambridge University Press, 1995.
- [3] LIN Q, CAI Y. Tensor ABCD Law for Partially Coherent Twisted Anisotropic Gaussian-Schell Model Beams[J]. Opt Lett, 2002, 27: 216-218.
- [4] CAI Y, LIN Q. Spectral Shift of Partially Coherent Twisted Anisotropic Gaussian-Schell Model Beams in Free Space [J]. Opt Commun, 2002, 204: 17-23.
- [5] MITCHELL M, CHEN Z, SHIH M, et al. Self-trapping of partially spatially incoherent light[J]. Phys Rev Lett, 1996, 77(3): 490-493.
- [6] CHRISTODOULIDES D, COSKUN T, JOSEPH R. Incoherent Spatial Solitons in Saturable Nonlinear Media[J]. Opt Lett, 1997, 22(14): 1080-1082.
- [7] KRÓLIKOWSKI W, EDMUNDSON D, BANG O. Unified Model for Partially Coherent Solitons in Logarithmically Nonlinear Media[J]. Phys Rev E, 2000, 61(3): 3122-3126.
- [8] SNYDER A, MITCHELL D, KIVSHAR Y. Unification of Linear and Nonlinear Wave Optics [J]. Mod Phys Lett B, 1995, 9(23): 1479-1506.