浙江科技学院学报，第19卷第2期，2007年6月
Journal of Zhejiang University of Science and Technology
Vol. 19 No. 2, June 2007

一类悬臂系统全局混沌同步研究

皇甫玉高，李群宏，郭 磊
（广西大学 数学与信息科学学院，南宁 530004）

摘 要：研究了一类利用线性状态误差反馈控制方法耦合的非自治悬臂振动系统的全局混沌同步。利用 Lyapunov 直接方法得到了一些全局混沌同步的充分判据，同时利用数字仿真的方法验证了所得结论的正确性。

关键词：悬臂振动系统；全局混沌同步；线性状态误差反馈控制；时变误差系统；Lyapunov 直接方法
中图分类号：O231.2 **文献标识码**：A **文章编号**：1671-8798(2007)02-0081-05

Study on Global Chaos Synchronization of Cantilever Beam System

HUANGFU Yu-gao, LI Qun-hong, GUO Lei
(College of Mathematics and Imformation Science, Guangxi University, Nanning 530004, China)

Abstract: A linear state error feedback control technique is utilized to synchronize two coupling cantilever beam system. Some sufficient criteria for global chaos synchronization are obtained by means of Lyapunov's direct method. And numerical simulations are used to verify these sufficient-criteria's correctness.

Key words: cantilever beam system; global chaos synchronization; linear state error feedback control; time-varied error system; Lyapunov's direct method

由于混沌同步的重要性，近年来，它已得到了广泛的研究。Pecora 和 Carroll[1] 首先引入了对于不同初始条件的两个恒等混沌系统同步的方法(PC 方法)。这种同步可以仅通过在驱动系统作用下的反映系统所有 Lyapunov 指数为负来实现，因而这种方法在对不同的系统进行分析时就有一定的局限性。此后，混沌系统的同步已被广泛地进行研究。但大量的研究都是关于自治混沌系统的。近来，大量的非自治混沌系统在机械和生命科学领域中被发现，且它们的同步现象也已被研究[2-11]。

梁是机械设计时最常用到的，对于横梁已有大量丰富的理论研究。文献[12,13]对悬臂梁系统丰富的非线性动力学行为进行了研究，包括分岔及混沌现象的出现。文献[2,3]利用 Lyapunov 直接方法分别对 Duffing 系统和一个水平平台系统利用线性状态误差反馈控制方法进行耦合而研究了系统的全局混沌同步现象。

对于悬臂振子的全局混沌同步，到目前为至还没

收稿日期：2007-04-23
基金项目：广西壮族自治区自然科学基金资助项目(0640002)；广西壮族自治区研究生教育创新计划资助项目(2006105930701M16)
作者简介：皇甫玉高(1975—)，男，河南原阳人，讲师，硕士，主要从事非线性动力学研究。

有研究过。本文考虑了一类悬臂振子[12]，利用 Lyapunov 直接方法和线性矩阵不等式(LMI)，得到了通过线性状态误差反馈控制耦合的主从悬臂振子的全局混沌同步的一些充分判据。所有的判据都是通过代数不等式表示的，这有利于设计反馈控制。

1 同步结构和误差系统

考虑下面的混沌悬臂振子

$$\ddot{y}+2\xi\dot{y}+y+\frac{36}{35}y^3=\beta\cos(\omega t)。\qquad(1)$$

式(1)中：ξ 是阻尼系数，β、ω 是外激励的振幅和频率。模型的详细细节可参考文献[12]。

令 $x_1=y$ 和 $x_2=\dot{y}$，系统(1)可变形为：

$$\begin{cases}\dot{x}_1=x_2;\\ \dot{x}_2=-x_1-2\xi x_2-\dfrac{36}{35}x_1^3+\beta\cos(\omega t)。\end{cases}\qquad(2)$$

等价的向量形式为：

$$\dot{x}=A(t)x+f(x)+H(t)\qquad(3)$$

式(3)中：$x=(x_1,x_2)^{\mathrm{T}}\in R^2$。

$$A(t)=\begin{pmatrix}0&1\\-1&-2\xi\end{pmatrix},$$

$$f(x)=\begin{bmatrix}0\\-\dfrac{36}{35}x_1^3\end{bmatrix},$$

$$H(t)=\begin{pmatrix}0\\ \beta\cos(\omega t)\end{pmatrix}。\qquad(4)$$

下面根据线性状态误差反馈控制子 $u(t)=\boldsymbol{K}(x-z)$ 构造一个关于两个恒等的非自治悬臂振子的主从同步结构，如下：

$$\begin{aligned}&M:\ \dot{x}=A(t)x+f(x)+H(t),\\&S:\ \dot{z}=A(t)z+f(z)+H(t)+u(t),\\&C:\ u(t)=\boldsymbol{K}(x-z),\end{aligned}\qquad(5)$$

其中状态变量 $z=(z_1,z_2)^{\mathrm{T}}\in R^2$，且 $\boldsymbol{K}\in R^{2\times2}$ 是一个常数控制矩阵。

定义误差变量 $e=x-z$。由

$$f(x)-f(z)=\begin{pmatrix}0&0\\-F(t)&0\end{pmatrix}e=M(t)e\qquad(6)$$

式(6)中：$F(t)=\dfrac{36}{35}(x_1^2+x_1z_1+z_1^2)$，可以得到一个时变误差系统

$$\begin{aligned}\dot{e}&=\dot{x}-\dot{z}=[A(t)-K]e+f(x)-f(z)\\&=[A(t)+M(t)-K]e\end{aligned}\qquad(7)$$

本研究的目标是寻找一个控制矩阵 $\boldsymbol{K}$ 使得主从振子无论初始条件 $x(0)$ 和 $z(0)$ 的位置如何，轨线 $x(t)$ 和 $z(t)$ 满足：

$$\lim_{t\to\infty}\mathrm{P}e\mathrm{P}=\lim_{t\to\infty}\mathrm{P}x(t)-z(t)\mathrm{P}=0,\qquad(8)$$

式(8)中：P·P 表示向量的 Euclid 范数。

显然，$e=0$ 是误差系统(7)的一个平衡点，因而混沌同步等价于线性时变误差系统在原点处的全局渐进稳定性。

2 全局混沌同步的充分判据

与其他混沌系统一样，混沌悬臂系统的轨线是有界的。因此，存在一个常数 m，使得 $\forall t\geqslant0$，$|x_1(t)|<m$。

现利用 Lyapunov 直接法得到一个满足式(8)的全局混沌同步的充分判据。以下定理与控制矩阵 $\boldsymbol{K}$ 有关。

定理 1 若存在一个对称矩阵 $\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}p_{11}&p_{12}\\p_{12}&p_{22}\end{pmatrix}\in R^{2\times2}$ 且 $\boldsymbol{P}>0$，一个控制矩阵 $\boldsymbol{K}=\begin{pmatrix}k_{11}&k_{12}\\k_{21}&k_{22}\end{pmatrix}\in R^{2\times2}$ 使得：

$$T_1=-k_{11}p_{11}-k_{21}p_{12}+|p_{12}|\left(1+\frac{108}{35}m^2\right)<0\qquad(9)$$

$$T_2=(1-k_{12})p_{12}-(2\xi+k_{22})p_{22}<0\qquad(10)$$

$$4T_1\cdot T_2>[|(1-k_{12})p_{12}-(2\xi+k_{11}+k_{22})p_{12}-k_{21}p_{22}|+\left(1+\frac{108}{35}m^2\right)p_{22}]^2\qquad(11)$$

则主从结构(5)有全局混沌同步。

证明 取二次 Lyapunov 函数：

$$V(e)=e^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}e,$$

其中 $\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}p_{11}&p_{12}\\p_{12}&p_{22}\end{bmatrix}>0$。

$V(e)$ 沿着误差系统(7)的轨线关于时间变量的导数为：

$$\begin{aligned}\dot{V}(e)&=\dot{e}^{\mathrm{T}}Pe+e^{\mathrm{T}}P\dot{e}\\&=[(A(t)+M(t)-K)e]^{\mathrm{T}}Pe+e^{\mathrm{T}}P[(A(t)+M(t)-K)e]\\&=e^{\mathrm{T}}[(A(t)+M(t)-K)^{\mathrm{T}}P+P(A(t)+M(t)-K)]e\end{aligned}$$

若 $\dot{V}(e)<0$，则须有：

$$Y=(A(t)+M(t)-K)^{\mathrm{T}}P+P(A(t)+M(t)-K)<0,\quad\forall t\geqslant0\qquad(12)$$

根据 Lyapunov 稳定定理，不等式(12)是线性时变误差系统(7)在原点处全局渐进稳定的一个充分条件。

由式(4) 和(6)，得到：

$$Y=\begin{pmatrix}-k_{11} & 1-k_{12}\\ -1-F(t)-k_{21} & -2\xi-k_{22}\end{pmatrix}^{\mathrm{T}}\begin{pmatrix}p_{11} & p_{12}\\ p_{12} & p_{22}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}p_{11} & p_{12}\\ p_{12} & p_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-k_{11} & 1-k_{12}\\ -1-F(t)-k_{21} & -2\xi-k_{22}\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}-2k_{11}p_{11}-2(1+F(t)+k_{21})p_{12} & (1-k_{12})p_{11}-(2\xi+k_{11}+k_{22})p_{12}-(1+F(t)+k_{21})p_{22}\\ (1-k_{12})p_{11}-(2\xi+k_{11}+k_{22})p_{12}-(1+F(t)+k_{21})p_{22} & 2(1-k_{12})p_{12}-2(2\xi+k_{22})p_{22}\end{pmatrix}$$

由于 Y 是对称的，$Y<0$ 当且仅当：

$$-2k_{11}p_{11}-2(1+F(t)+k_{21})p_{12}<0 \tag{13}$$

$$2(1-k_{12})p_{12}-2(2\xi+k_{22})p_{22}<0 \tag{14}$$

$$4[k_{11}p_{11}+(1+F(t)+k_{21})p_{12}][(2\xi+k_{22})p_{22}-(1-k_{12})p_{12}]-[(1-k_{12})p_{11}-(2\xi+k_{11}+k_{22})p_{12}-(1+F(t)+k_{21})p_{22}]^2>0 \tag{15}$$

对任意 $t\geqslant 0$ 有：

$$|F(t)|=\left|\frac{36}{35}(x_1^2+x_1z_1+z_1^2)\right|\leqslant\frac{108}{35}m^2$$

由条件 $P>0$ 知：$p_{ii}>0,(i=1,2)$。因此：

$$\begin{aligned}&-2k_{11}p_{11}-2(1+F(t)+k_{21})p_{12}\\ &\leqslant -2k_{11}p_{11}-2k_{21}p_{12}+2\mid p_{12}(1+F(t))\mid\\ &\leqslant -2k_{11}p_{11}-2k_{21}p_{12}+2\mid p_{12}\mid\left(1+\frac{108}{35}m^2\right)\\ &=2T_1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\mid(1-k_{12})p_{11}-(2\xi+k_{11}+k_{22})p_{12}-(1+F(t)+k_{21})p_{22}\mid\\ &\leqslant\mid(1-k_{12})p_{11}-(2\xi+k_{11}+k_{22})p_{12}-k_{21}p_{22}\mid+p_{22}\left(1+\frac{108}{35}m^2\right)\end{aligned}$$

因此，如果不等式(9) ～ (11) 成立，则不等式(13) ～ (15) 也成立。【证毕】

在实际应用中，总是希望同步控制算子的结构尽量简单，因此根据定理 1，可以得到如下一些简单控制算子的代数同步判据的推论。

推论 1　如果存在控制矩阵 $\boldsymbol{K}=\mathrm{diag}\{k_1,k_2\}$ 和对称正定矩阵 $\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}p_{11} & p_{12}\\ p_{12} & p_{22}\end{bmatrix}$，满足：

$$k_1>\frac{|p_{12}|\left(1+\frac{108}{35}m^2\right)}{p_{11}} \tag{16}$$

$$k_2>\frac{p_{12}-2\xi p_{22}}{p_{22}} \tag{17}$$

$$4\left[k_1p_{11}+\left(1+\frac{108}{35}m^2\right)|p_{12}|\right][(2\xi+k_2)p_{22}-p_{12}]-\left[p_{11}-(2\xi+k_1+k_2)p_{12}-\left(1+\frac{108}{35}m^2\right)p_{22}\right]^2>0 \tag{18}$$

则主从结构(5) 有全局混沌同步。

证明　用 $k_{11}=k_1,k_{22}=k_2,k_{12}=k_{21}=0$ 代人到不等式(13) ～ (15) 就能得到不等式(16) ～ (18)。【证毕】

推论 2　若存在控制矩阵 $\boldsymbol{K}=\mathrm{diag}\{k,k\}$ 和对称正定矩阵 $\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}P_{11} & P_{12}\\ P_{12} & P_{22}\end{bmatrix}$ 使得：

$$k>\max\left\{\frac{|p_{12}|\left(1+\frac{108}{35}m^2\right)}{p_{11}},\frac{p_{12}-2\xi p_{22}}{p_{22}}\right\}\geqslant 0; \tag{19}$$

$$4(p_{11}p_{12}-p_{12}^2)k^2-4\left[2p_{22}\mid p_{12}\mid\left(1+\frac{108}{35}m^2\right)+p_{11}(p_{12}-2\xi p_{22})+\mid p_{12}(p_{11}-2\xi p_{12})\mid\right]k+4\mid p_{12}\mid\left(1+\frac{108}{35}m^2\right)(p_{12}-2\xi p_{22})-\left[\mid p_{11}-2\xi p_{12}\mid+\left(1+\frac{108}{35}m^2\right)p_{22}\right]^2>0 \tag{20}$$

则主从结构(5) 有全局混沌同步。

证明　令 $k_1=k_2=k$，代入不等式(16) 和(17)，可得不等式(19)。

由(19) 知 $k>0$，故有：

$$\left[\mid p_{11}-(2\xi+k_1+k_2)p_{12}\mid+\left(1+\frac{108}{35}m^2\right)p_{22}\right]^2\leqslant\left[\mid p_{11}-2\xi p_{12}\mid+2k\mid p_{12}\mid+\left(1+\frac{108}{35}m^2\right)p_{22}\right]^2 \tag{21}$$

因此，在不等式(18) 中取 $k_1=k_2=k$ 时可得不等式(20)。

由 $p_{11}p_{22}-p_{12}^2>0$ 知：不等式(20) 关于 k 的解存在。【证毕】

下面取 $p_{12}=0,p_{11}=p_{22}\left(1+\frac{108}{35}m^2\right)>0$ 时，有正对称矩阵 $\boldsymbol{P}=p_{22}\begin{bmatrix}1+\frac{108}{35} & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}>0$，用这个矩阵根据(19) 和(20) 可得下面的代数同步判据：

$$K=\mathrm{diag}\{k,k\},\ k>\sqrt{\xi^2+1+\frac{108}{35}m^2}-\xi>0 \tag{22}$$

假设 $k_1=k,k_2=0$。在不等式(16) ～ (18) 中，根据不等式(21) 可以推出如下推论：

推论 3 若存在控制矩阵 $\boldsymbol{K}=\mathrm{diag}\{k,0\}$ 和对称正定矩阵 $\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}p_{11} & p_{12}\\ p_{12} & p_{22}\end{bmatrix}$ 使得：

$$k>\frac{|p_{12}|\left(1+\frac{108}{35}m^2\right)}{p_{11}} \tag{23}$$

$$p_{12}-2\xi p_{22}<0 \tag{24}$$

$$p_{12}^2k^2+2\Big[p_{22}|p_{12}|\Big(1+\frac{108}{35}m^2\Big)+2p_{11}(p_{12}-2\xi p_{22})+|p_{12}(p_{11}-2\xi p_{12})|\Big]k-4|p_{12}|\Big(1+\frac{108}{35}m^2\Big)(p_{12}-2\xi p_{22})+\Big[|p_{11}-2\xi p_{12}|+\Big(1+\frac{108}{35}m^2\Big)p_{22}\Big]^2<0 \tag{25}$$

则主从结构(5) 有全局混沌同步。

选择对称正定矩阵 $\boldsymbol{P}=p_{22}\begin{bmatrix}1+\frac{108}{35}m^2 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$，$p_{22}>0$,则根据不等式(23) ～ (25) 可得如下同步判据：

$$\boldsymbol{K}=\mathrm{diag}\{k,0\},k>\frac{1+\frac{108}{35}m^2}{2\xi} \tag{26}$$

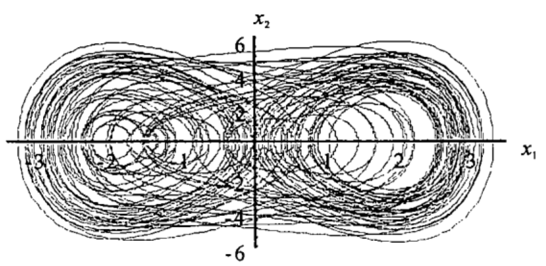
3 举 例

为了验证所得的充分判据，考虑悬臂振子系统的参数：$\xi=0.005,\beta=10,\omega=0.48$。主从悬臂振子的初始条件可任意选取，例如：

M：$(x_1(0),x_2(0))=(1,2)$，

S：$(z_1(0),z_2(0))=(-1,1)$。

数字仿真结果表明悬臂振动系统的轨线出现混沌现象(如图 1)。混沌吸引子变量 x_1 满足对任意 $t\geqslant 0$ 有 $|x_1(t)|\leqslant 4$。因此，可得常数 $m=4$。



$\xi=0.005$；$\beta=10$；$\omega=0.48$

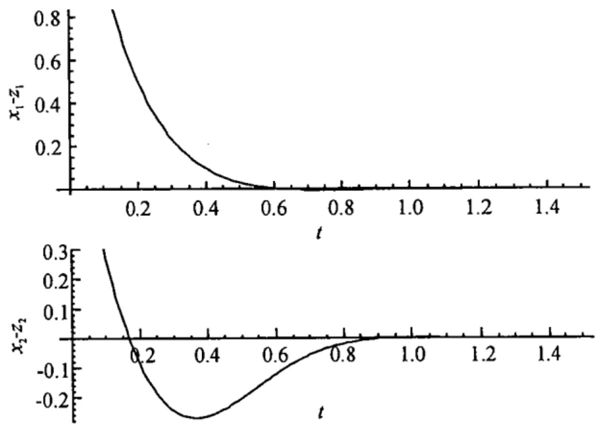
图 1 悬臂振子的混沌运动

根据判据(22) 和(26) 的简化计算，可得如下的同步条件：

1) $\boldsymbol{K}=\mathrm{diag}\{k,k\}$，$k>7.09228$；

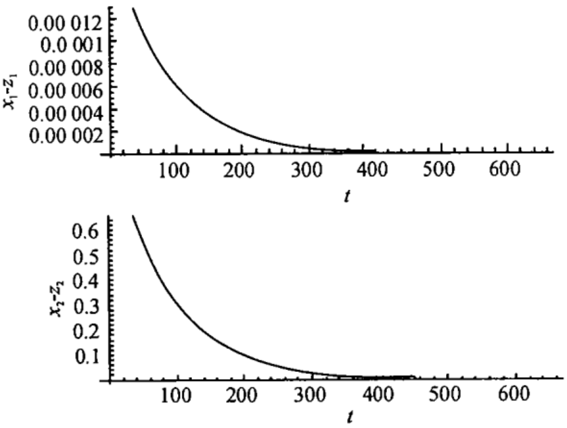
2) $\boldsymbol{K}=\mathrm{diag}\{k,0\}$，$k>5\,037.14$。

对于条件 1) 取 $k=7.1$，条件 2) 取 $k=5\,038$，则混沌同步的结果分别如图 2 和 3 所示。



$\boldsymbol{K}=\mathrm{diag}\{7.1,\ 7.1\}$

图 2 两非自治悬臂系统的混沌同步



$\boldsymbol{K}=\mathrm{diag}\{5\,038,\ 0\}$

图 3 两非自治悬臂系统的混沌同步

4 结 语

本文得到了主从非自治悬臂振子的混沌同步的线性误差反馈控制的一些充分判据。这些代数形式的判据容易用来设计混沌同步的反馈控制，数字仿真验证了这些充分判据的正确性。

参考文献：

[1] PECORA L M, CARROLL T L. Synchronization in chaotic systems[J]. Physical Review Letters, 1990,

64:821-824.

[2] WU Xiao-feng, CAI Jian-ping, WANG Mu-hong. Global chaos synchronization of the parametrically excited Duffing oscillators by linear state error feedback control[EB/OL]. (2006-06-14) [2006-11-21]. http://www.sciencedirect.com/science?_ob=ArticleURL&_udi=B6TJ4-4KJ0SKK-5&_user=1002943&_coverDate=07%2F31%2F2006&_alid=580219657&_rdoc=1&_fmt=full&_orig=search&_cdi=5300&_sort=d&_docanchor=&view=c&_ct=1&_acct=C000050169&_version=1&_urlVersion=0&_userid=1002943&md5=93a5395418d61d555d36dd3aed4da684.

[3] WU Xiao-feng, CAI Jian-ping, WANG Mu-hong. Master-slave chaos synchronization criteria for the horizontal platform systems via linear state error feedback control [J]. Journal of Sound and Vibration, 2006, 295: 378-387.

[4] CHEN Hsien-Keng. Global chaos synchronization of new chaotic systems via nonlinear control[J]. Chaos, Solitons & Fractals, 2005, 23: 1245-1251.

[5] ELABBASY E M, AGIZA H N, EL-DESSOKY M M. Global synchronization criterion and adaptive synchronization for new chaotic system[J]. Chaos, Solitons & Fractals, 2005, 23: 1299-1309.

[6] LEI You-ming, XU Wei, SHEN Jian-wei, et al. Global synchronization of two parametrically excited systems using active control[J]. Chaos, Solitons & Fractals 2006, 28: 428-436.

[7] CHEN Heng-hui. Global synchronization of chaotic systems via linear balanced feedback control[J]. Applied Mathematics and Computation, 2007, 186: 923-931.

[8] CHEN H K. Chaos and chaos synchronization of a symmetric gyro with linear plus cubic damping[J]. Journal of Sound and Vibration, 2002, 255: 719-740.

[9] GE Z M, YU T C, CHEN Y S. Chaos synchronization and parameter identification for gyroscope system [J]. Journal of Sound and Vibration, 2003, 268: 731-749.

[10] GE Z M, LEE J K. Chaos synchronization and parameter identification for gyroscope system[J]. Applied Mathematics and Computation, 2005, 163: 667-682.

[11] YAMAPI R, WOAFO P. Dynamids and synchronization of coupled self-sustained electromechanical devices[J]. Journal of Sound and Vibration, 2005, 285: 1151-1170.

[12] EMANS Joseph. WIERCIGROCH Marian, KRIVTSOV Anton M. Cumulative effect of structural nonlinearities: chaotic dynamics of cantilever beam system with impacts[J]. Chaos, Solitons & Fractals, 2005, 23: 1661-1670.

[13] WANG Lin, NI Qiao, HUANG Yu-ying. Bifurcations and chaos in a forced cantilever system with impacts[J]. Journal of Sound and Vibration, 2006, 296: 1068-1078.