

立体角的计算与棱角的识别

闫再友^a, 才 漪^b

(南京航空航天大学 a. 航空宇航学院, b. 艺术学院, 南京 210016)

摘 要: 在边界元方法中, 尖棱角处必须做特殊处理以克服此处的法向量的不连续性。通过立体角的值来判断结构中的尖棱角, 对实现边界元算法具有重要的作用。现详细地介绍立体角的数值求解方法, 并以两个实例说明应用立体角识别尖棱角的可行性。

关键词: 立体角; 边界元; 棱角

中图分类号: O302; O242.1

文献标识码: A

文章编号: 1671-8798(2007)02-0086-03

Calculation of Solid Angle and Identification of Edge and Corner

YAN Zai-you^a, CAI Yi^b

(a. College of Aerospace Engineering; b. College of Art, Nanjiang University of
Aeronautics and Astronautics, Nanjing 210016, China)

Abstract: Because normal vector at sharp edge and corner is discontinuous, node located at such position must be treated specially. The solid angle is calculated to identify sharp edges and corners. This technique is very useful to the implementation of boundary element method. Calculation of solid angles using numerical approach is described in detail. Two examples are presented to show the feasibility of identifying sharp edges and corners using solid angle.

Key words: solid angle; boundary element method; edge and corner

在边界元方法中, 立体角是个非常重要的量。在几何学中立体角也称为多面角。而笔者认为, 在边界元方法中使用固体角这个名称更贴切。这是因为在边界元方法中, 任意一点处的立体角均与其同固体表面的位置有关。通常, 光滑表面上任意一点的无量纲立体角均为常值 0.5, 而对于带有尖棱角的结构, 无量纲立体角将是 0 到 1 的变量。因为在棱角处节点的法向量不连续, 所以对于边界元方法, 变量在棱角处的处理是比较复杂的。棱角的处理直接影响最终数值解的精度, 因此就必须知道哪些节点在棱角上, 但问题是如何在程序中自动识别

棱角节点。因为光滑表面上任意一点的无量纲立体角均为常值 0.5, 所以笔者很自然地就想到用立体角来识别结构中的棱角节点。

1 立体角的计算方法与棱角识别

空间中某一点的立体角是指结构表面在以该点为中心的球面上的投影面积。其单位为球面度, 取值范围是 $[0, 4\pi]$ 。关于立体角的详细数学描述可参考文献[1]。这里笔者是从声学边界元方法^[2-4]的角度来考虑立体角及其值计算。从文献[2]可得声学外问题中无量纲立体角 $c(p)$ 的表达式为:

收稿日期: 2007-03-02

作者简介: 闫再友(1972—), 男, 黑龙江双城人, 副教授, 博士, 主要从事边界元方法与气动声学的研究。

$$c(p) = 1 + \iint_s \frac{\partial G_0(p, q)}{\partial n_q} dS_q \quad (1)$$

式(1)中, $G_0(p, q)$ 是三维 Laplace 方程在自由空间的基本解。

$$G_0(p, q) = 1/4\pi r, r = \|p - q\| \quad (2)$$

法向量 n_q 指向声场, 即为内法向矢量, 如图 1 所示。图 1 也说明了在尖棱角处, 节点的法向量不连续。然而可以看到在每个面上或者说单元上, 节点的法向量是连续的。

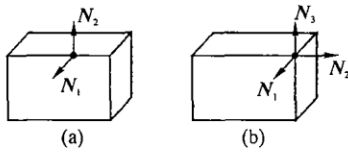


图 1 内法向量示意

对于光滑结构表面, 立体角的值分布如下:

$$c(p) = \begin{cases} 1 & p \text{ 在结构表面外部} \\ 1/2 & p \text{ 在结构表面上} \\ 0 & p \text{ 在结构表面内部} \end{cases} \quad (3)$$

参考表达式(3), 对于简单的几何结构, 某点的立体角可以通过该点所在的结构占空间的比例求得。比如在图 1(a) 中在棱边上的节点, 其对应的立体角为 $1 - 1/4 = 0.75$; 而对于在图 1(b) 中在角点处的节点, 其对应的立体角为 $1 - 1/8 = 0.875$ 。这些结果对验证数值计算的准确性非常有用, 可以帮助分析程序是否正确。

由表达式(3)可知, 在光滑的结构表面上任意一点的立体角恒等于 $1/2$ 。而当结构的表面存在尖棱角时, 表面上各点的立体角取值范围是 $(0, 1)$ 。因此, 可以根据表面上某点的立体角的值是否等于 $1/2$ 来判断该点是否在尖棱角处, 即不在光滑的表面上。由于数值计算存在精度问题, 因此, 在数值方法中某点是否是棱角节点的判断准则为:

$$|c(p) - 0.5| > \epsilon \quad (4)$$

式(4)中, ϵ 是根据需要给定的小量。比如假定 $170^\circ \pm 10^\circ$ 棱边均为光滑, 则 $\epsilon = 10/360 = 0.02778$ 。

在数值计算中, 结构表面是用 8 节点曲边四边形单元^[5,6]来模拟。因此, 任意一点的整体坐标可以用单元形函数 $N_i(\xi, \eta)$ 和节点坐标表达为:

$$\begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^8 N_i(\xi, \eta) \begin{Bmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{Bmatrix} \quad (5)$$

将式(5)对单元坐标求偏导数, 有

$$\mathbf{S} = \begin{Bmatrix} x_{,\xi} \\ y_{,\xi} \\ z_{,\xi} \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^8 N_{i,\xi} \begin{Bmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{Bmatrix} \quad (6)$$

$$\mathbf{T} = \begin{Bmatrix} x_{,\eta} \\ y_{,\eta} \\ z_{,\eta} \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^8 N_{i,\eta} \begin{Bmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{Bmatrix} \quad (7)$$

因此表面上的法向量可以表达为

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{S} \times \mathbf{T}}{\|\mathbf{S} \times \mathbf{T}\|} \quad (8)$$

最后, 用 n 个单元表达式(1)可以离散化为

$$c(p) = 1 + \sum_{j=1}^n \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{1}{4\pi r^3} \mathbf{r} \cdot (\mathbf{S} \times \mathbf{T}) d\xi d\eta \quad (9)$$

式(9)可以直接用二重 Gauss 积分求得。

2 算例

为了更好地理解立体角的计算以及尖棱角的识别, 现举 2 个简单的例子来计算一下。

第一个例子如图 2 所示是一个台阶式的结构。该结构表面有大量的尖棱角。图中给出了可视部分的部分节点编号。这些节点处的立体角用如上所述数值方法求得并在表 1 中给出。为了判断哪些点是在尖棱角上, 小量 ϵ 选定为 0.02778。图 3 以图形方式表达了对表 1 中各节点是否是尖棱角点的判定过程。显然, 除了节点 63, 84 和 95 外, 其他所有点都是在尖棱角上。这和观察结果是完全一致的。

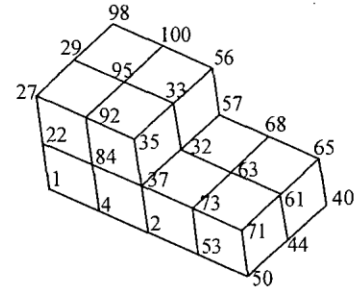


图 2 台阶式结构的表面网格划分

表 1 图 2 中所标识的节点处的立体角

节点	$c(p)$	节点	$c(p)$
1	0.875 0	56	0.875 0
2	0.750 0	57	0.625 1
4	0.750 0	61	0.750 1
22	0.750 0	63	0.500 2
27	0.875 0	65	0.875 0
29	0.750 0	68	0.750 0
32	0.250 2	71	0.875 0
33	0.750 0	73	0.750 0
35	0.875 0	84	0.500 1
37	0.625 1	92	0.750 0
40	0.875 0	95	0.500 2
44	0.750 1	98	0.875 0
50	0.875 0	100	0.750 0
53	0.750 1		

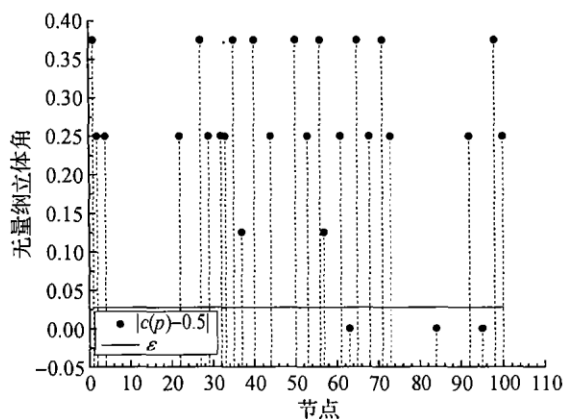


图 3 根据表 1 中给出的立体角判断尖棱角点

第二个例子是如图 4 所示的有限长圆柱。其柱面是光滑的,图 4 的不光滑是离散所致。同样,表 2 给出了图 4 中所示节点处的立体角的数值解。图 5 直观地表达了表 2 中各节点是否是尖棱角节点的判定过程。除 27,43,47,57,59,64 外,所有其他节点均在尖棱角上。该结果可以从图 4 得到验证。

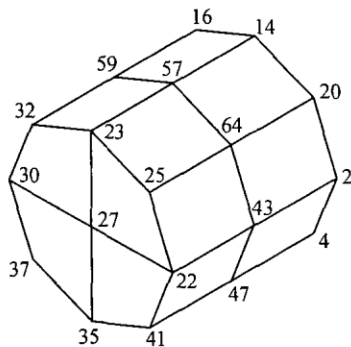


图 4 有限圆柱结构的表面网格划分

表 2 图 4 中所标识的节点处的立体角

节点	$c(p)$	节点	$c(p)$
2	0.749 2	32	0.749 2
4	0.749 2	35	0.749 2
14	0.749 2	37	0.749 2
16	0.749 2	41	0.749 2
20	0.749 2	43	0.498 5
22	0.749 2	47	0.498 4
23	0.749 2	57	0.498 5
27	0.500 1	59	0.498 4
30	0.749 2	64	0.498 4

3 结 语

尽管在尖棱角处法向量不连续,但是该处的立体角仍可用数值积分精确地求得。边界元方法在尖

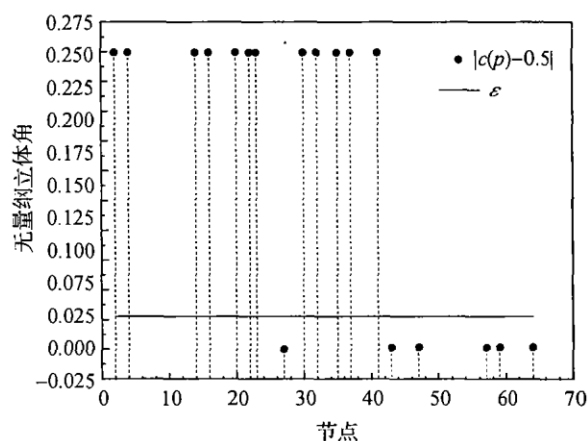


图 5 根据表 2 中给出的立体角判断尖棱角点

棱角处必须做特殊的处理,因此非常有必要自动地识别哪些节点位于尖棱角处。根据立体角在光滑表面上恒等于 0.5 的事实,本文提出用立体角的值来识别尖棱角处的节点。文中给出了两个简单的例子,结果证明这一方法行之有效。本方法已经在文献[7]中得到应用,将为边界元算法的开发以及涉及尖棱角的问题提供参考和帮助。

参考文献:

- [1] Wolfram Research, Inc. Mathworld[EB/OL]. [2007-02-15]. <http://mathworld.wolfram.com/SolidAngle.html>.
- [2] YAN Z Y, CUI F S, HUANG K C. Investigation on the normal derivative equation of helmholtz integral equation in acoustics[J]. Computer Modeling in Engineering & Sciences, 2005, 7(1): 97-106.
- [3] YAN Z Y, HUANG K C, ZHENG H. Solving the hypersingular boundary integral equation in three-dimensional acoustics using a regularization relationship[J]. J Acoust Soc Am, 2003, 113(5): 2674-2683.
- [4] 闫再友,姜楫,何友声,等. 声学边界元方法中超奇异数值积分处理的新方法[J]. 声学学报, 2001, 26(3): 282-286.
- [5] 闫再友,姜楫,严明. 利用边界元法计算无界声场中结构体声辐射[J]. 上海交通大学学报, 2000, 34(4): 520-523.
- [6] 丁浩江. 弹性和塑性力学中的有限元方法[M]. 北京: 机械工业出版社, 1989: 114-123.
- [7] YAN Z Y. Treatment of sharp edges & corners in the acoustic boundary element method under Neumann boundary condition[J]. Computer Modeling in Engineering & Sciences, 2006, 13(2): 81-90.