浙江科技学院学报，第 19 卷第 4 期，2007 年 12 月
Journal of Zhejiang University of Science and Technology
Vol. 19 No. 4, Dec. 2007

求解伪单调变分不等式的新的自适应投影算法

白宏芳，吴晓维
（陕西师范大学 数学与信息科学学院，西安 710062）

摘　要：考虑求解一类变分不等式问题的新的自适应投影算法，该算法改进了搜索的方向和步长，改进的方向、步长在解点附近均不趋于 0，保证算法的快速收敛性。并在伪单调的条件下证明了算法是全局收敛的，使得该算法的适用性更广。数值实验表明算法是有效的。

关键词：变分不等式；自适应投影算法；伪单调；全局收敛
中图分类号：O242.2　　**文献标识码**：A　　**文章编号**：1671-8798(2007)04-0249-03

New Self-Adaptive Projection Method for Solving Pesudomotone Variational Inequalities

BAI Hong-fang, WU Xiao-wei
(College of Mathematics and Information Science, Shaanxi Normal University, Xi'an 710062, China)

Abstract: We propose a new self-adaptive projection method with improved direction and step-size for solving variational inequality problems. The improved direction and step-size will not be zero when the iteration is near the solution, which make the method converge quickly. We proved that under the condition that the function F is pesudomotone, the sequence generated by the method converges to a solution of the variational inqueality problem globally, thus the method can be used extensively. Some preliminary computational results are reported, which illustrate that the new method is efficient.

Key words: variational inequalities; self-adaptive projection method; pesudomotone; globalgonvergence

变分不等式问题是找 $x^* \in \Omega$，使得

$$VI(F,\Omega)\quad (x-x^*)^T F(x^*) \geqslant 0,\ \forall x \in \Omega \tag{1}$$

其中 $F: R^n \to R^n$ 是连续映射，$\Omega \subseteq R^n$ 是闭凸集。当 Ω 的投影易于计算时，求解式(1) 最简单的方法就是投影算法。但经典投影算法存在缺点：第一是迭代的步长，方向在解点附近趋近于 0，导致算法收敛缓慢。文献[1] 中方向在解点附近趋近于 0，文献[2] 中步长在解点附近趋于 0。第二是算法收敛条件太强，文献[3,4] 要求 F 强单调，文献 [1,5-7] 要求 F

收稿日期：2007-09-02
基金项目：国家自然科学基金资助项目(606710636)；陕西省自然科学基础研究计划项目(2006A02)
作者简介：白宏芳(1982—)，女，甘肃庄浪人，硕士研究生，主要从事最优化理论与算法的研究。

单调。

所以本文给出一种新的自适应投影算法，该算法改进了搜索方向与步长，使得在解点附近不趋于0，保证算法的收敛速度，并在 F 伪单调的条件下证明算法是全局收敛的。算法采用文献[8,9]中的自适应准则，保证算法的收敛性不受参数影响。数值实验表明算法是有效的，鲁棒的。

下面给出在后面章节中要用到的符号标记、概念和性质。

首先范数采用 2- 范数，$\Omega \subseteq R^n$ 是非空的闭凸集。Ω^* 是 $VI(F,\Omega)$ 的解集。P_Ω 是从 R^n 到 Ω 的投影。$P_\Omega(x) = \arg\min\{\|x-y\|, y\in\Omega\}$。

引理 1[8] 令 $\beta > 0$，则 $x^* \in \Omega^*$ 的充要条件是 $x^* = P_\Omega[x^* - \beta F(x^*)]$。

由定理可以看出，x^* 是 $VI(F,\Omega)$ 的解等价于是 $e(x,\beta)$ 的零点。

引理 2[2] 对 $\forall x \in \Omega, 0 < \beta_1 < \beta_2$，则

$$\|e(x,\beta_1)\| \leqslant \|e(x,\beta_2)\| \tag{2}$$

定义 1 $F: K \subseteq R^n \to R^n$ 在 K 上是伪单调的，如果

$$(x-y)^{\mathrm T}F(y) \geqslant 0 \Rightarrow (x-y)^{\mathrm T}F(x) \geqslant 0;\ \forall x,y \in K。 \tag{3}$$

1 算法和收敛性分析

算法 1 给定 $\varepsilon > 0, x^0 \in \Omega, \mu \in (0,1), \lambda = \beta_0 = \beta = 1, L \in (0,1), \gamma \in (1,2), K > 0, k = 0$。

1) 计算 $e(x^k,\beta_k) = x^k - P_\Omega[x^k - \beta_k F(x^k)]$，如果 $\|e(x^k,\beta_k)\| < \varepsilon$，停止，否则

2) 找到最小整数 m_k，使得 $\beta_k = \beta\mu^{m_k}$ 满足

$$\beta_k\|F(x^k) - F(x^k - e(x^k,\beta_k))\| \leqslant L\|e(x^k,\beta_k)\|$$

3) 计算步长

$$\rho^k = \frac{e(x^k,\beta_k)^{\mathrm T} g(x^k,\beta_k)}{\|g(x^k,\beta_k) + e(x^k,\beta_k)\|^2} \tag{4}$$

其中 $g(x,\beta) = e(x,\beta) - \beta[F(x) - F(x - e(x,\beta))]$。

4) 计算 $x^{k+1} = P_\Omega[x^k - \theta\beta_k\rho^k d(x^k,\beta_k)]$，

其中 $d(x,\beta) = g(x,\beta) + \lambda F(x)(\lambda \geqslant \beta > 0)$ (5)

$$\lambda_k = \max(\beta_k, 0.45), \theta = K\lambda_k。$$

5) 如果 $r_k \leqslant \mu$，其中 $r_k = \dfrac{\|\beta[F(x^k) - F(x^{k+1})]\|}{\|x^k - x^{k+1}\|}$，

$\beta = \gamma\beta_k$；否则，$\beta = \beta_k, k = k+1$，转到 1)。

下面根据引理 1 证明算法 1 的收敛性。

引理 3[2] 如果 $\|e(x,1)\| \neq 0$，那么存在 $0 < L < 1$，$\tilde\beta > 0$，使得对所有 $0 < \beta \leqslant \tilde\beta$，则

$$\beta\|F(x) - F(x - e(x,\beta))\| \leqslant L\|e(x,\beta)\| \tag{6}$$

引理 4[8] 如果假设不等式(6)成立，有

$$e(x,\beta)^{\mathrm T} g(x,\beta) \geqslant (1-L)\|e(x,\beta)\|^2 \tag{7}$$

$$e(x,\beta)^{\mathrm T} g(x,\beta) > \frac{1}{2}\|g(x,\beta)\|^2 \tag{8}$$

引理 5 假设不等式(6)成立，$\forall x \in \Omega, x^* \in \Omega^*$，有 $(x - x^*)^{\mathrm T} d(x,\beta) \geqslant (1-L)\|e(x,\beta)\|^2$

证明 因为 $d(x,\beta) = g(x,\beta) + \lambda F(x), (\lambda \geqslant \beta > 0)$，在文献[8]中证明了 $(x-x^*)^{\mathrm T} g(x,\beta) \geqslant e(x,\beta)^{\mathrm T} g(x,\beta) \geqslant (1-L)\|e(x,\beta)\|^2$，根据式(1)和 F 的伪单调性，则 $(x-x^*)^{\mathrm T} d(x,\beta) \geqslant (x-x^*)^{\mathrm T} g(x,\beta) \geqslant e(x,\beta)^{\mathrm T} g(x,\beta) \geqslant (1-L)\|e(x,\beta)\|^2$。根据上面的定理，可以看出 $d(x,\beta)$ 的反方向是 $\frac{1}{2}\|x-x^*\|^2$ 的下降方向。

定理 1 假设 F 伪单调，不等式(6)成立，令 $\{x^k\} \subset R^n$ 是由算法 1 产生的序列，那么 $\{x^k\}$ 是有界的。

证明 令 $p = \theta\beta_k$ 根据式(5)和投影映射的非扩张性，则

$$\|x^{k+1} - x^*\|^2 \leqslant \|x^k - p\rho_k d(x^k,\beta_k) - x^*\|^2 = \|x^k - x^*\|^2 - 2p\rho_k(x^k - x^*)^{\mathrm T} d(x^k,\beta_k) + p^2(\rho_k)^2\|d(x^k,\beta_k)\|^2$$

如果令 $\psi(\rho) = 2p\rho(x^k - x^*)^{\mathrm T} d(x^k,\beta_k) - p^2\rho^2\|d(x^k,\beta_k)\|^2$，那么 $\psi(\rho)$ 是关于 ρ 的二次函数，在 $\rho^* = \dfrac{(x^k - x^*)^{\mathrm T} d(x^k,\beta_k)}{p\|d(x^k,\beta_k)\|^2}$ 达到最大值，$\psi(\rho^*) = p\rho^*(x^k - x^*)^{\mathrm T} d(x^k,\beta_k)$

由引理 5 则

$$\|x^{k+1} - x^*\|^2 \leqslant \|x^k - x^*\|^2 - p(1-L)\rho_k\|e(x^k,\beta_k)\|^2 \tag{9}$$

由式(9)

$$\|x^{k+1} - x^*\|^2 \leqslant \|x^k - x^*\|^2 \leqslant \cdots \leqslant \|x^0 - x^*\|^2。 \tag{10}$$

定理 2 假设 F 伪单调，不等式(6)成立，并且解集 Ω^* 是非空的，那么由算法 1 产生的序列 $\{x^k\}$ 收敛到 $VI(F,\Omega)$ 的解集。

证明 根据式(7)和(8)，则 $\rho = \dfrac{e(x,\beta)^{\mathrm T} g(x,\beta)}{\|g(x,\beta) + e(x,\beta)\|^2} > \dfrac{1-L}{5-4L} > 0$。根据式(9)，则 $\|x^{k+1} - x^*\|^2 \leqslant \|x^k - x^*\|^2 - p\dfrac{(1-L)^2}{5-4L}\|e(x^k,\beta_k)\|^2$，

由定理 1 知道 $\{x^k\}$ 是有界的，所以 $\sum_{k=0}^{\infty} p\dfrac{(1-L)^2}{5-4L}\|e(x^k,\beta_k)\|^2 < +\infty$，则 $\lim_{k\to\infty}\|e(x^k,\beta_k)\|^2 = 0$。由 $\{\beta_k\}$ 满足 $\inf\{\beta_k\} = \beta_{\min} > 0$[8]，$\forall k \geqslant 0$，根据引

理 4 有 $\lim\limits_{k\to\infty}\|e(x^k,\beta_{\min})\|^2=0$。由 $\{x^k\}$ 有界，则至少存在一个聚点。设 $\tilde{x}$ 是 $\{x^k\}$ 的聚点，且 $\{x^{kj}\}\subseteq\{x^k\}$ 是收敛到 $\tilde{x}$ 的子列，则有 $\|e(\tilde{x},\beta_{\min})\|=\lim\limits_{j\to\infty}\|e(u^{kj},\beta_{\min})\|=0$。

根据引理 1，$\tilde{x}$ 是 $VI(F,\Omega)$ 的解，在式(10)中令 $\tilde{x}=x^*$，那么 $\{x^k\}$ 收敛到 $VI(F,\Omega)$ 的解集。

2　数值实验

现用算法 1 求解互补问题，MATLAB 编程，并在内存为 512 MB，CPU 为 pentium(R)4 的 PC 机上运行。各实验数据取 10 次实验的平均值。其中初始点 x^0 随机产生。数值结果表明，新算法是有效的。

问题 1　考虑下面非线性互补问题 $x\geqslant 0$，$F(x)\geqslant 0$，$x^{\mathrm{T}}F(x)=0$，其中

$$F(x)=\begin{bmatrix}3x_1{}^2+2x_1x_2+2x_2{}^2+x_3+3x_4-6\\ 2x_1{}^2+x_1+x_2{}^2+10x_3+2x_4-2\\ 3x_1{}^2+x_1x_2+2x_2{}^2+2x_3+9x_4-9\\ x_1{}^2+3x_2{}^2+2x_3+3x_4-3\end{bmatrix},$$

其中 $\lambda=0.45$，$L=0.9$，$u=0.8$，$K=60$，$\gamma=1.9$，$\varepsilon=1.0e-7$。

表 1　实验结果

算法	IT	CPU time	PC
算法 1	45	0.015 0	89
文献[4] 中的算法	145	0.016 0	310

注：表中第一行是文中算法 1 对应的实验结果，第二行是文献[4] 中的算法。IT 表示迭代次数，CPU time 表示时间，PC 表示投影的次数。

从表 1 数据可以看出，从迭代次数，时间和投影的次数可以看出算法对步长、方向的改进是有效的。

问题 2　考虑下面非线性互补问题

$$x\geqslant 0,F(x)\geqslant 0,x^{\mathrm{T}}F(x)=0,$$
$$F(x)=D(x)+Mx+\boldsymbol{q}。$$

其中 $D(x)$ 与 $Mx+\boldsymbol{q}$ 分别是 $F(x)$ 的非线形和线形部分。

$M=A^{\mathrm{T}}A+\boldsymbol{B}$，其中 $A\in R^{n\times n}$，其中的元素随机分布在(－5,5)。

$\boldsymbol{B}$ 是同样分布的反对称阵。$\boldsymbol{q}$ 是在(－500,500)上服从一致分布的向量。

$F(x)$ 的非线形部分为 $D_i(x)=d_i{}^*\arctan(u_i)$，其中 d_i 是(0,1)之间的随机变量。

$\lambda=0.45$，$L=0.9$，$u=0.7$，$K=12$，$\gamma=1.5$，$\varepsilon=1.0e-7$。

表 2　实验结果

维数 n	算法 1			文献[4]中的算法		
	IT	CPU	PC	IT	CPU	PC
10	89	0.047 0	177	275	0.094 0	693
100	183	1.250	365	263	2.375 0	583
500	280	69.968	559	408	140.19	897

表 2 中各列表示如表 1，根据实验数据可以看出，算法 1 从迭代次数、时间、投影的次数都优于文献[4]中的算法。算法 1 中步长、方向的改进加快了收敛速度。

3　结　语

新的求解变分不等式问题自适应投影算法，改进了搜索的步长与方向，使得二者均不在解点附近趋于 0，并且在 F 伪单调的条件下证明算法的全局收敛性。数值实验表明信算法是全局收敛的，有效的。

参考文献：

[1] HE B S. A class of projection and contraction methods for monotone variational inequalities [J]. Applied Mathematics and Optimization, 1997,35:69-76.

[2] HAN D R, LO H K. Two new self-adaptive projection methods for variational inequality problems[J]. Computers and Mathematics with Application, 2002, 43:1529-1573.

[3] GOLDSTEIN A A. Convex programming in Hilbert Space[J]. Bullein of the American Mathematical Society, 1964,70: 709-710.

[4] LEVITIN E S, POLYAK B T. Constrained minimization problems[J]. USSR Compu-tational Mathematics and Mathematical Physics, 1966(6):1-50.

[5] HE B S, LIAO L Z. Improvements of some projection methods for monotone nonlinear variational inequalities [J]. Journal of Optimization Theory and Application, 2002,112(1):111-128.

[6] HE B S, YANG Z H, YUAN X M. An approximate proximal-extragradient type method for monotone variational inequalities [J]. Journal of Optimization Theory and Application, 2004,300:362-374.

[7] KORPELEVICH G M. The extragradient methods for finding saddle points and others problems[J]. Matecon, 1976,12: 747-756.

[8] HE B S, MENG H, YANG Q, et al. Modified goldstin-levitin-polyak projection method for ssymmetric strongly monotone variationl inequalities[J]. Journal of Optimization Theory and Application, 2002, 112(1): 129-143.

[9] HAN D R, SUN W Y. A new modified goldstin-levitin-polyak projection method for variationl inequalities[J]. Computers and Mathematics with Application, 2004,47:1817-1825.