浙江科技学院学报,第 20 卷第 1 期,2008 年 3 月
Journal of Zhejiang University of Science and Technology
Vol.20 No.1, Mar.2008

一维搜索问题的三次 B 样条插值法

罗煦琼
(广西民族大学 数学与计算机科学学院,南宁 530006)

摘　要: 基于一元三次 B 样条函数插值, 给出了一种求解一维搜索问题的新算法和数值实验结果。结果表明,新算法能很快地求出全局最优解, 且剖分数越大, 精度越高。

关键词: 一维搜索;三次 B 样条;插值
中图分类号: O221.2; O23;TP301.6　　文献标识码: A　　文章编号: 1671-8798(2008)01-0001-03

Cubic B-spline interpolation for one-dimensional search method

LUO Xu-qiong
(College of Mathematics and Computer Science, Guangxi University for Nationalities, Nanning 530006, China)

Abstract: Based on univariate cubic B-spline interpolation, a new algorithm to solve one dimensional search problem and the numerical results are presented in this paper. The results show that the new algorithm presented in the paper can get the optimum solution. The more the number of partition is, the higher the accuracy is.

Key words: one-dimensional search; cubic B-spline; interpolation

一维搜索是求解一个单变量函数的极小值 $\min\limits_{x\in R} f(x)$, 其中 $f(x)$ 是定义在实数域上的非线性函数。求解一维搜索问题的方法有许多, 如牛顿迭代法[1]、抛物型插值法[1]、三次插值法[1]、黄金分割算法[2]、混沌优化法[3] 等; 此外, 全局最优化问题的一类确定性方法为覆盖法(Covering Method)[4-5], 该方法逐步地将探测出的不含全局极小的区域删除, 直到剩余的区域足够小且含全局极小; 以及结合界限函数和非精确搜索而得的算法[6], 满足一定条件时可在有限步内得到全局最优化问题的全局最优解。插值法的思想是根据被插值函数 $f(x)$ 的某些节点的值, 构造一个与它近似的函数 $g(x)$。在一定条件下可以期望 $g(x)$ 的极小点会接近于 $f(x)$ 的极小点。

由于 B 样条函数是多项式样条函数中的一类具有正性与局部支撑性的样条函数, 利用 B 样条函数来表示插值样条将大大地化简计算, 而且计算的数值稳定性也很好, 因此本文构造了一个三次 B 样条函数 $g(x)$ 逼近目标函数 $f(x)$,通过求 $g(x)$ 的极小值来近似地逼近 $f(x)$ 的极小值。数值结果说明该方法可以一次性求出函数的极小值, 不要求通过迭代, 且数值结果具有很好的逼近阶。

2　一元 B 样条函数的简介

2.1　等距剖分下一元 B 样条函数的定义

等距剖分下 n 阶 B 样条函数 $B_n(x)$ 的递推定义

收稿日期: 2007-12-03
基金项目: 广西民族大学研究生教育创新基金资助项目(GXUN-CHX0756)。
作者简介: 罗煦琼(1984—),男,湖南衡阳人,硕士研究生,研究方向为样条函数及其应用。

如下[7]

$$B_0(x)=\begin{cases}1, & 当\ |x|<\dfrac{1}{2},\\ \dfrac{1}{2}, & 当\ |x|=\dfrac{1}{2},\\ 0, & 当\ |x|>\dfrac{1}{2},\end{cases}$$

$$B_n(x)=B_{n-1}(x)\times B_0(x)\,(n=1,2,3,\cdots),$$

所以当 $n=1,2,3,\cdots$ 时

$$B_n(x)=\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}B_{n-1}(x-t)\,\mathrm{d}t=\int_{x-\frac{1}{2}}^{x+\frac{1}{2}}B_{n-1}(t)\,\mathrm{d}t。$$

例如：

$$B_1=\begin{cases}0, & |x|\geq 1,\\ 1-x, & 0\leq x<1,\\ B_1(-x), & -1<x<0。\end{cases}$$

$$B_2=\begin{cases}0, & |x|\geq\dfrac{3}{2},\\ \dfrac{1}{2}x^2-\dfrac{3}{2}x+\dfrac{9}{8}, & \dfrac{1}{2}\leq x<\dfrac{3}{2},\\ -x^2+\dfrac{3}{4}, & 0\leq x<\dfrac{1}{2},\\ B_2(-x), & -\dfrac{3}{2}<x<0。\end{cases}$$

$$B_3=\begin{cases}0, & |x|\geq 2,\\ -\dfrac{1}{6}x^3+x^2-2x+\dfrac{4}{3}, & 1\leq x<2,\\ \dfrac{1}{2}x^3-x^2+\dfrac{2}{3}, & 0\leq x<1,\\ B_3(-x), & -2<x<0。\end{cases}$$

2.2 等距剖分下三次 B 样条插值函数的构造[8]

设 $f(x)$ 是定义在区间 $[a,b]$ 上的函数 $f(x_i)=f_i,i=0,1,2\cdots,n$，求三次样条函数 $s(x)\in S_p(\Delta,3)$，使得

$$s(x_i)=f_i,\ i=0,1,2,\cdots,n, \qquad (1)$$

插值条件(1) 给出了 $n+1$ 个条件，由于一个三次样条函数靠 $n+3$ 个独立的条件来确定，所以这不足以完全确定一个三次样条函数，为此要根据问题要求补充两个边界条件，它们分别是

问题 Ⅰ　$s'(x_0)=f'_0,s'(x_n)=f'(x_n)$。

问题 Ⅱ　$s''(x_0)=f''_0,s''(x_n)=f''(x_n)$，或 $s''(x_0)=s''(x_n)=0$，称为自然边界条件。

问题 Ⅲ　当 $f(x)$ 为周期函数，因 $f(x_0)=f(x_n)$，此时 $s(x_0)=s(x_n)=f(x_0)$，且 $s'(x_0+0)=s'(x_0-0),s''(x_0+0)=s''(x_0-0)$，这时 $s(x)$ 称为周期样条函数。

在 $[a,b]$ 区间上给定一个等距剖分

$$\Delta_h: a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b,$$

$$h=x_i-x_{i-1}=\frac{b-a}{n},$$

并记外节点 $x_{-1}=a-h,x_{n+1}=b+h$，对此情形，有一组 $S_p(\Delta_h,3)$ 中的三次 B 样条函数

$$B_3\left(\frac{x-x_i}{h}\right)=B_3\left(\frac{x-x_0}{h}-i\right),i=-1,0,1,2,\cdots,n+1, \qquad (2)$$

它们中的每一个在 $[a,b]$ 上都不恒等于零，而其他的 i 所对应的 B 样条函数，则在 $[a,b]$ 上恒等于零。

由于(2) 的总个数为 $n+3$，这与三次样条函数空间的维数一致，因此它们构成空间 $S_p(\Delta_h,3)$ 的一组基底，用这样一组三次 B 样条基函数，可将插值问题 Ⅰ、Ⅱ、Ⅲ 的解表示为

$$f(x)\approx s_h(x)=\sum_{i=-1}^{n+1}c_iB_3\left(\frac{x-x_i}{h}\right)。 \qquad (3)$$

对此

$$\begin{cases}s'_h(x_0)=\dfrac{1}{h}\sum\limits_{i=-1}^{n+1}c_iB'_3(-i)=f'_0,\\ s_h(x_j)=\sum\limits_{i=-1}^{n+1}c_iB_3(j-i)=f_j,j=0,1,\cdots,n,\\ s'_h(x_n)=\sum\limits_{i=-1}^{n+1}c_iB'_3(n-i)=f'_n。\end{cases} \qquad (4)$$

注意到 $B_3(x)$ 函数值及其局部非零的性质

$$B_3(0)=\frac{2}{3},\ B_3(\pm 1)=\frac{1}{6},$$

$$B_3(x)=0,当|x|\geq 2;$$

还注意到

$$B'_3(x)=B_2\left(x+\frac{1}{2}\right)-B_2\left(x-\frac{1}{2}\right),$$

$$B'_3(0)=0,B'_3(\pm 1)=\mp\frac{1}{2},B'_3(x)=0,(|x|\geq 2)。$$

于是式(4) 的每一个方程中只有 3 个非零系数，具体为

$$\begin{cases}-c_{-1}+c_1=2hf'_0,\\ c_{j-1}+4c_j+c_{j+1}=6f_j\ ,i=0,1,\cdots,n,\\ -c_{n-1}+c_{n+1}=2hf'_n。\end{cases} \qquad (5)$$

将式(5) 式写成矩阵形式

$$\boldsymbol{A}c=f。$$

其中

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}-1 & 0 & 1 & & \\ 1 & 4 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & 4 & 1\\ & & -1 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

矩阵 $\boldsymbol{A}$ 为 $(n+3)$ 阶，

$$f=(2hf'_0,6f_0,\cdots,6f_n,2hf'_n)^{\mathrm{T}},$$

$$c=(c_{-1},c_0,\cdots,c_{n+1})^{\mathrm{T}}。$$

2.3　三次样条插值收敛性

定理　设 $f(x) \in C^4[a,b]$, $s(x)$ 为问题 I 或问题 II 的三次样条函数, 则有估计式

$$\| f^{(k)}(x) - s^{(k)}(x) \|_\infty \le C_k \| f^4(x) \|_\infty h^{4-k},\quad k = 0,1,2$$

其中 $h = \max\limits_{0\le i\le n-1} h_i$, $h_i = x_{i+1} - x_i (i = 0,1,\cdots,n-1)$, $C_0 = \frac{5}{384}$, $C_1 = \frac{1}{24}$, $C_3 = \frac{3}{8}$, $f(x)_\infty = \max\limits_{a\le x\le b} | f(x) |$。

定理证明见文献[9]。

3　算法步骤

本算法对于任意区间 $[a,b]$, 都可以求出该区间段上在给定精度 $\varepsilon > 0$ 时的极小值点 x^*。因为 $\| f(x) - s(x) \|_\infty \le kh^4$, $k > 0$ 为常数, 所以为保证三次 B 样条插值函数 $s(x)$ 在给定精度 $\varepsilon > 0$ 下很好地逼近目标函数 $f(x)$, 必须先通过 $ah^4 = \varepsilon$ 放大估算出步长 h, 然后利用 $h = \frac{b-a}{n}$, 算出等距剖分段数 n。用 MATLAB 编程求出每一剖分段上的三次 B 样条插值函数 $s(x)$ 的表达式, 在每一段上求出所有当 $s'(x) = 0$ 时的点 t, 如果 $s^{(2)}(t) > 0$, 则 t 即为极小值点 x^*。实现步骤如下:

步骤 1　设定区间 $[a,b]$。

步骤 1　给定精度 $\varepsilon > 0$, 计算步长 h 和等距剖分段数 n。

步骤 2　用 $\boldsymbol{A}c = f$ 计算 $c = (c_{-1}, c_0, \cdots, c_{n+1})^{\mathrm{T}}$。

步骤 3　用 $s_h(x) = \sum\limits_{i=-1}^{n+1} c_i B_3\left(\frac{x - x_i}{h}\right)$ 计算每一剖分段上的插值函数 $s_h(x)$。

步骤 4　求每一剖分段上的插值函数 $s_h(x)$ 的一阶导函数 $s'_h(x)$, 并求出所有当 $s'_h(x) = 0$ 的点 t。

步骤 5　求每一剖分段上的插值函数 $s_h(x)$ 的二阶导函数 $s_h^{(2)}(x)$, 判断步 4 中所得到的所有点 t。如果 $s_h^{(2)}(t) > 0$, 则 t 为极小值点 x^*, 否则 $[a,b]$ 不存在极小值点, 重复步 1 至步 5, 另设一新区间 $[a,b]$, 在此新区间上搜索极小值。

4　数值实验与结果分析

例 1: 将三次 B 样条插值函数公式(3)对极小值 $\min\limits_{x\in R} f(x) = -xe^{-x}$ 进行试算, 在给定区间 $[0,1.5]$ 上, 给定精度 ε, 结果见表 1。由此可以看出三次 B 样条插值逼近阶很高, 误差很小, 收敛速度很快。

表 1　三次 B 样条插值的算例

Table 1　The numerical results of cubic B-spline interpolation

步长 h	剖分段数 n	三次 B 样条插值 x^*	精确解 x	误差 $e = \| x^* - x \|$
0.50	3	0.998 714 0	1.000 000 0	1.3×10^{-3}
0.30	5	1.000 512 9	1.000 000 0	5.1×10^{-4}
0.15	10	0.999 939 3	1.000 000 0	6.1×10^{-5}
0.10	15	0.999 997 8	1.000 000 0	2.2×10^{-6}

例 2: 考虑全局优化问题 $\min f(x) = \sin x + \sin(10x/3)$, 这里 $x \in [2.7, 7.5]$。该问题的目标函数有三个局部极小, 其中一个为全局最小。当给定精度 $\varepsilon = 10^{-5}$, 第一次剖分 $n = 5$ 时, 全局最优点 $x^* = 5.145\ 728\ 9$, 误差 $e = | x^* - x | = 6.4\times 10^{-5}$, 函数全局最优值是 $f(x^*) = -1.899\ 599\ 35$。

5　结　语

例 1、例 2 计算结果表明, 本文给出的方法在一维的范围内可有效求得函数的全局最优解, 对于相当复杂的函数, 所得结果是令人满意的, 具有一定的实用价值。该法有如下显著特点: 可较为精确地求得全局最优解, 在理论上可达到任意精度要求; 对于给定的区间, 能一次性求出函数的全局最优解, 不需要经过迭代计算, 且精度可达 10^{-4} 以上。

参考文献:

[1] 唐焕文,秦学志.实用最优化[M].大连:大连理工大学出版社,2004.

[2] 宋巨龙,钱富才.基于黄金分割的全局最优方法[J].计算机工程与应用,2005(4):94-96.

[3] 杨迪雄,李刚.非线性函数全局最优的一种混沌化混合算法[J].工程力学,2004,21(3):106-110.

[4] HORST R, TUY H. Global Optimization: Deterministic Approaches[M]. Berlin: Springer-Verlag, 1990.

[5] TORN A, ZILINSKAS A. Global Optimization [M]. Berlin: Springer-Verlag, 1989.

[6] 李博,曹圣山.非精确搜索一维全局最优化方法[J].青岛海洋大学学报,1999,29(3):519-524.

[7] 崔锦泰.多元样条理论与应用[M].西安:西安交通大学出版社,1991.

[8] 傅凯新,黄云清,舒适.数值计算方法[M].长沙:湖南科学技术出版社,2002.

[9] 关治,陆金甫.数值分析基础[M].北京:高等教育出版社,1998.