浙江科技学院学报,第 20 卷第 1 期,2008 年 3 月
Journal of Zhejiang University of Science and Technology
Vol.20 No.1, Mar.2008

拐点的教学探讨

陶志雄
(浙江科技学院 理学院,杭州 310023)

摘 要: 鉴于某些高等数学教材中拐点的定义与练习不相一致的问题,提出一个解决的办法,即在不增加难度的前提下,建议在拐点教学中增加简单易用的判别定理及例子,以弥补拐点教学中的定义和练习不一致的问题。

关键词: 高等数学;微积分;拐点;曲率
中图分类号: G642.33; O13 文献标识码: A 文章编号: 1671-8798(2008)01-0065-03

On teaching of inflection point

TAO Zhi-xiong
(School of Science, Zhejiang University of Science and Technology, Hangzhou 310023, China)

Abstract: Because of the reason that the exercises go beyond the concept about infection point in some higher mathematics text books, under the premise of having no more difficulty than before, this paper gives a suggestion that the teaching content related to inflection point is properly revised by adding both a simple and lucid criterion theorem and examples stated in this paper, which aims at avoiding the teaching problems as above.

Key words: higher mathematics; calculous; inflection point; curvature

由高等教育出版社出版、同济大学数学教研室主编的《高等数学》(第四版)中,拐点的定义为:连续曲线 $y = f(x)$ 上凹弧与凸弧的分界点称为这曲线的拐点。

该书没有给出一般的拐点定义,在函数有二阶导数的条件下,由这个定义可以得出 (x_0, y_0) 为曲线的拐点的充要条件是 $y''(x)$ 在 x_0 的左右邻域异号。显然,这样的拐点定义只适合于显函数,不适合于由参数方程确定的函数,当然也不适合于极坐标情形。通常在教学中可以发现,学生在学习中只重视定理,不重视定义,因此在判断拐点的时候,几乎所有的学生将拐点简单视为凹弧与凸弧的分界点,仅以函数的二阶导数在 x_0 的左右邻域是否异号来判定,于是出现了以下问题:

在有些教材中,虽然仅给出显函数的拐点定义,但是有由参数方程确定的函数求拐点的练习,例如在上述书的习题 3～7 中练习 4 的两小题都是参数方程给出的函数,自然就都不是显函数,也就是这些题超出了上述定义的范围,因此在交给学生去做练习的时候就出现了上面谈到的问题。在学生的作业中,通常按照以下解法来解这两个练习,简单叙述如下:

收稿日期: 2007-07-05
作者简介: 陶志雄(1961—),男,浙江绍兴人,副教授,博士,主要从事几何拓扑学研究及大学数学教学。

练习4题为:(1) $x = t^2, y = 3t + t^3$; (2) $x = 2a\cos\theta, y = 2a\sin^2\theta$

解:(1) 根据参数方程所确定函数的求导法,可以得到 $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{3(t^2-1)}{4t^3}$,令其为零得到解为 $t_1 = -1, t_2 = 1$,而且在 t_1, t_2 的两侧,即小于 t_1, t_2 和大于 t_1, t_2,$\frac{d^2y}{dx^2}$ 分别都变号,又考虑到 $t_3 = 0$ 左右两侧 $\frac{d^2y}{dx^2}$ 也变号,根据该书第三章第七节的定理,可得 $(1, -4), (1, 4), (0, 0)$ 都是拐点。

对于(2) 同理可以解得:拐点为 $\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}a, \frac{3}{2}a\right)$ 和 $\left(-\frac{2\sqrt{3}}{3}a, \frac{3}{2}a\right)$。

有不少学生也向教师提出为什么在(1) 中(0, 0) 不是拐点的问题。而笔者也了解到某些专业以后也要碰到拐点的判定问题,基于这样的现状,笔者感到在教学中有必要对拐点的教学内容作一些适合于大一第一学期学生的改动,详述如下。

1 函数拐点的一般定义

为了给出曲线拐点的一般定义,同时也是为了说明将得到的方法所确定的拐点确实符合一般拐点的定义,首先来看什么是一条曲线的曲率。

定义1[1-3] 假设曲线是由参数方程形式 $x = x(t), y = y(t)$ 给出,那么该曲线在每一点或在 t 处的曲率定义为:

$$\kappa = \frac{x'y'' - y'x''}{(x'^2 + y'^2)^{3/2}} \tag{1}$$

如果被给函数为极坐标形式 $r = r(\theta)$(一般现有教材都不讨论这种情形),那么由上述定义可得曲率为

$$\kappa = \frac{r^2 + 2r_\theta'^2 - rr_{\theta\theta}''}{(r^2 + r_\theta'^2)^{3/2}} \tag{2}$$

定义2[4-5] 如果曲线在曲线上的某一点处曲率的符号发生了变化,那么就称它是这条曲线上的一个拐点。

由此,直观地来讲,拐点是平面曲线两个不同弯曲方向的连接点,它不依赖于坐标的选取。于是容易看到圆 $x^2 + y^2 = R^2$ 上两点 $(-R, 0)$ 与 $(R, 0)$ 都是假拐点,尽管它们都是凸弧与凹弧的连接点。

按照定义1,假如一条平面曲线由 $y = f(x)$ 给出,则在一点的曲率为:

$$\kappa = \frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{3/2}} \tag{3}$$

显然,式(3) 所定义的曲率与高等数学教材中曲率定义略有差别。但在拐点的定义上包含了原高等数学教材上的定义。如果按照定义2来考虑参数方程给出的函数的拐点,那么就不会出现上述做法中得出习题4(1) $t = 0$ 即(0, 0) 也是拐点的结果,它是一个假拐点(见本文第三节)。

这里所说的“假拐点”,是指按照二阶导数变号(并不考虑函数的形式) 来判别得出为拐点,而实际上并不是拐点的点。

2 判别拐点的方法

考虑到《高等数学》这门课是大一学生的课程,不可能用比较高深的理论来讨论拐点,所以这里提供一个比较简便的适合大一学生使用的方法来判别拐点。其思路就是在上述忽视函数的表达形式得出为“拐点”的基础上,增加下面的定理就可以非常轻松地得出其究竟是否为拐点。

为了叙述的方便,把忽视函数的表达形式、仅考虑二阶导数确认为拐点的曲线上的点简称为“拐点”,这样的点在前面的例子中已经知道未必是拐点,还需要进一步地判别,同时注意到在该点未必有二阶导数,故加引号表示之。

定理1 若参数方程所给的函数 $x = x(t), y = y(t)$ 在 $(t_0 - \delta, t_0) \cup (t_0, t_0 + \delta)$ 具有二阶导数,$\delta > 0$,且 (x_0, y_0)(对应 $t = t_0$) 是一个“拐点”,

若 $x'(t)$ 在 $(t_0 - \delta, t_0)$ 与 $(t_0, t_0 + \delta)$ 同号,则 (x_0, y_0) 是一个拐点。

若 $x'(t)$ 在 $(t_0 - \delta, t_0)$ 与 $(t_0, t_0 + \delta)$ 异号,则 (x_0, y_0) 不是一个拐点。

由这个定理,很容易判断“拐点”是否为拐点,只要看一下 $x'(t)$ 在该点附近符号变化即可。

证明 如果 (x_0, y_0)(对应 $t = t_0$) 是一个“拐点”,且 $x'(t)$ 在 $(t_0 - \delta, t_0)$ 与 $(t_0, t_0 + \delta)$ 同号,自然 $x'(t) \neq 0$。这就是说在 (x_0, y_0)(对应 $t = t_0$) 的一个足够小的去心邻域内,y 可以表示为 x 的显函数,根据公式 $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{x'y'' - y'x''}{x'^3}$,$x'y'' - y'x''$ 与 x' 在 $(t_0 - \delta, t_0)$ 同号(或异号),在 $(t_0, t_0 + \delta)$ 异号(或同号),但由假设 $x'(t)$ 在 $(t_0 - \delta, t_0)$ 与 $(t_0, t_0 + \delta)$ 同号,即 $x'y'' - y'x''$ 在 $(t_0 - \delta, t_0)$ 与 $(t_0, t_0 + \delta)$ 异号。根据定

义 2 得知(x_0, y_0)确实是一个拐点。这里顺便也证明了 $x'(t)$ 在 t_0 的两侧异号时所谓的"拐点"不是拐点。因此结论真。

值得一提的是：若 $x'(t)$ 在 t_0 连续，$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{x'y''-y'x''}{x'^3}$ 在 t_0 的某个邻域内存在，那么根据定理 1 就可知道"拐点"也是一个拐点。因为这意味着 $x'(t_0) \neq 0$，由保号性得在局部范围里 $x'(t)$ 同号，所以(x_0, y_0)(对应 $t = t_0$)是一个拐点。就是说在这样的情形下，不需要检验 $x'(t)$ 的符号变化，就可断定"拐点"是一个真拐点。

对于隐函数可以有相仿的结果，但是涉及偏导数，在使用上对于一年级第一学期的学生不实用，故不在此讨论。

对于极坐标情形 $r = r(\theta)$，因为 $x = r(\theta)\cos\theta$，$y = r(\theta)\sin\theta$，所以问题就可归结为参数方程的情形。

$$\frac{dy}{dx} = \frac{r'\sin\theta + r\cos\theta}{r'\cos\theta - r\sin\theta},\quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{2r'^2 - r''r + r^2}{(r'\cos\theta - r\sin\theta)^3}$$

这样相应于上述定理有：

定理 2　若被给函数为极坐标形式 $r = r(\theta)$ 在 $(\theta_0 - \delta, \theta_0) \cup (\theta_0, \theta_0 + \delta)$ 具有二阶导数，$\delta > 0$，且$(\theta_0, r(\theta_0))$是一个"拐点"，

若 $r'\cos\theta - r\sin\theta$ 在 $(\theta_0 - \delta, \theta_0)$ 与 $(\theta_0, \theta_0 + \delta)$ 同号，则$(\theta_0, r(\theta_0))$是一个拐点。

若 $r'\cos\theta - r\sin\theta$ 在 $(\theta_0 - \delta, \theta_0)$ 与 $(\theta_0, \theta_0 + \delta)$ 异号，则$(\theta_0, r(\theta_0))$不是一个拐点。

3　应用举例

例 1　若 $x = t^2 - t, y = -t^{1/3}$，求其拐点。

解　方法 1)　因为 $x' = 2t - 1, x'' = 2$，

$y' = -\frac{1}{3}t^{-2/3}, y'' = \frac{2}{9}t^{-5/3}$，所以

$$\kappa = \frac{x'y'' - y'x''}{(x'^2 + y'^2)^{3/2}} = \frac{2(5t - 1)}{9t^{5/3}[(2t - 1)^2 + t^{4/3}/9]^{3/2}}$$

的零点为 $t = 1/5$，不可导点为 $t = 0$。

由于这两点的左右两侧 κ 都变号，因此对应曲线上的点都是拐点(图 1)。

方法 2)　因为 $\frac{dy}{dx} = (1 - 2t)t^{2/3}/3$，$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{2(5t - 1)}{9t^{5/3}(2t - 1)^2}$，所以 $\frac{d^2y}{dx^2}$ 的零点为 $t = 1/5$，不可导点为 $t = 0, 1/2$ 两点。

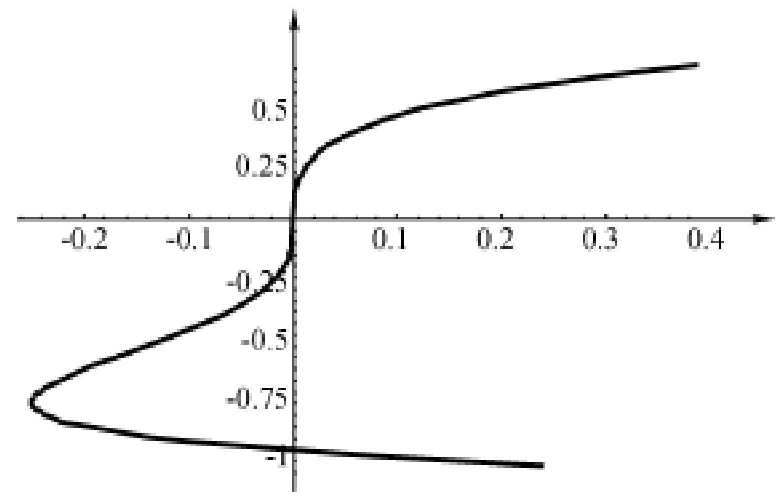

图 1　$x = t^2 - t, y = -t^{1/3}$

Fig.1　$x = t^2 - t, y = -t^{1/3}$

在 $t = 0$ 处，由于在$(-1/2, 0)$和$(0, 1/2)$ $x' = 2t - 1$ 同号，因此由定理 1 可得对应曲线上的点(0, 0)为拐点。

在 $t = 1/2$ 处，由于在$(1/2, 1)$内 $x' = 2t - 1 > 0$ 和在$(0, 1/2)$内 $x' = 2t - 1 < 0$，即在 $t = 1/2$ 两侧异号，因此由定理 1 可得对应曲线上的点$(-0.25, -1/2^{1/3})$$(-1/2^{1/3} \approx -0.793701)$不是拐点。这在图 1 中可以明显看到。

而 $t = 1/5$ 是符合定理后面讨论的，因此曲线上对应的点$(-0.16, -1/5^{1/3})$也是拐点。

例 2　求心形线 $r = a(1 + \cos\theta)(a > 0)$ 的拐点。

解　方法 1)　$\kappa = \frac{r^2 + 2r_\theta^2 - rr_{\theta\theta}}{(r^2 + r_\theta^2)^{3/2}} =$

$$a^{-1}\frac{(1 + \cos\theta)^2 + 2\sin^2\theta - (1 + \cos\theta)\cos^2\theta}{[(1 + \cos\theta)^2 + \sin^2\theta]^{3/2}} =$$

$$a^{-1}\frac{1 + \cos\theta + \sin^2\theta(2 + \cos\theta)}{2^{3/2}[1 + \cos\theta]^{3/2}},$$

因为 $1 + \cos\theta$ 与 $\sin^2\theta(2 + \cos\theta)$ 总是非负，而且总有一个是正的，因此除了 $\theta = \pi$ 外，曲率 κ 均为正，即该曲线无拐点。

方法 2)　因为 $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{2r'^2 - r''r + r^2}{(r'\cos\theta - r\sin\theta)^3} =$

$$a^{-1}\frac{1 + \cos\theta + \sin^2\theta(2 + \cos\theta)}{-[\sin\theta(1 + 2\cos\theta)]^3}$$

同上理由，分子总是大于零，所以 $\frac{d^2y}{dx^2}$ 的符号变化完全取决于 $-[\sin\theta(1 + 2\cos\theta)]^3$，即 $r'\cos\theta - r\sin\theta$ 的符号变化，根据定理 2，该曲线没有拐点。

通过上述两个例子可以看到定理 1 和定理 2 的使用还是比较方便、有效的。虽然，若使用拐点的一般定义可以相对简单地判别拐点，但是为了不破坏原来教学体系，这样的改动使用起来仍然是相当简便的。

(下转第 71 页)