浙江科技学院学报,第 20 卷第 3 期,2008 年 9 月
Journal of Zhejiang University of Science and Technology
Vol.20 No.3, Sep. 2008

不定方程 $4x^2-4y^2-z^2=3$ 的初等解法

陶志雄
(浙江科技学院 理学院,杭州 310023)

摘　要: 使用一元二次方程有整数解的性质,讨论了 $k+m+n+2km+2mn+2kn=0$ 有整数解的条件,证明了它有解的充要条件是 $4x^2-4y^2-z^2=3$ 有整数解,并给出了求解 $4x^2-4y^2-z^2=3$ 的方法和 mathematica 程序算法。

关键词: 三元二次不定方程;初等数论;整数解
中图分类号: O156.1　　　**文献标识码:** A　　　**文章编号:** 1671-8798(2008)03-0161-03

Elementary methods of solving undetermined equation $4x^2-4y^2-z^2=3$

TAO Zhi-xiong
(School of Science, Zhejiang University of Science and Technology, Hangzhou 310023, China)

Abstract: By using the properties of quadratic equation with one unknown to have integer solutions, the paper studies the condition so that the equation $k+m+n+2km+2mn+2kn=0$ to have integer solutions, proves whether this equation has integer solutions to be equivalent to whether $4x^2-4y^2-z^2=3$ has integer solutions, and gives a simple method to solve this equation. Finally, the mathematica program is given to realize this method.

Key words: ternary quadratic indefinite equation; elementary number theory; integer solution

变数个数多于方程个数,且取整数值的方程(或方程组)称为不定方程(或不定方程组)[1-2]。

不定方程的求解虽然是一个古老的话题,但一直是数论研究的一个课题,三元二次不定方程就是其中之一[3]。本文主要考虑 $4x^2-4y^2-z^2=3$ 的整数解问题,得到一个等价定理,即

定理　不定方程 $4x^2-4y^2-z^2=3$ 有整数解的充要条件是

$$k+m+n+2km+2mn+2kn=0$$

有整数解。

由此证明过程找到方程 $4x^2-4y^2-z^2=3$ 的整数解,并在最后给出了求解的程序(用 mathematica 软件写成)。

1　方程等价的证明

首先考虑不定方程 $k+m+n+2km+2mn+2kn=0$ 的解。

(注:除非特殊说明,否则本文所说有解都是指有整数解。)

设 $m=-2k-p,p>0$,代入原方程得:

$$\begin{aligned}0&=k+m+n+2km+2mn+2kn=\\&k+(1+2k)(p-1)+\\&(1-2k-2p)(n+1+2k)\end{aligned}\qquad(1)$$

因为 $-2k\equiv 2p-1 \mod(-2k-2p+1)$,所

收稿日期: 2008-08-28
作者简介: 陶志雄(1961—　),男,浙江绍兴人,副教授,博士,主要从事几何拓扑学研究以及大学数学教学。

以原方程有解的充要条件是

$$0 \equiv k+(1+2k)(p-1) \equiv$$

$$-k-2p^2+2p-1 \bmod (-2k-2p+1) \qquad (2)$$

有解,而且从一个方程的解可以得到另一个方程的解。

方程(2)意味着存在整数 w 使得

$$-k+w(-2k-2p+1)-2p^2+2p-1=0,$$

也即:

$$2p^2+2(w-1)p+(2w+1)k+1-w=0 \qquad (3)$$

有整数解,按照一元二次方程的公式解,

$$p_{1,2}=\frac{(1-w\pm\sqrt{-1+w^2-2k-4wk})}{2}$$

是一个整数,也就是

$$-1+w^2-2k-4wk$$

是某个整数 y 的完全平方,而且

$$\frac{-(w-1)\pm y}{2}$$

也是一个整数,因此(3)方程有解就是方程

$$w^2-4wk-1-2k-y^2=0, \qquad (4)$$

有解,而且 $w\pm y$ 为奇数,但这可以由等式(4)得到,因为

$$4wk+2k=w^2-y^2-1。$$

所以式(3)有解可推得式(4)有解。

反之,若式(4)有解,则可以倒推得式(3)有解。

同理,式(4)是以 w 为未知量的二次方程,有解的充要条件是存在某个整数 x 使得判别式

$$\Delta=4(1+2k+4k^2+y^2)=4x^2,$$

即所得方程

$$1+2k+4k^2+y^2-x^2=0 \qquad (5)$$

有解。

而它有解等价于存在整数 z 使得

$$\Delta=4(-3-4y^2+4x^2)=4z^2,$$

即方程 $4x^2-4y^2-z^2=3$ 有解。

这样就完成了定理的证明。

2 方程的求解

在方程(3)中,若 $w=0$,则存在某个整数 y,以 p 为未知量的二次方程的判别式

$$\Delta=4(-1-2k)=4y^2,$$

所以 y 是奇数,即

$$y=2h+1, k=-\frac{y^2+1}{2}=-(2h^2+2h+1),$$

h 是任何整数,

于是

$$p=\frac{2\pm 2y}{4}=\frac{1\pm y}{2},$$

即 $p=h+1$ 或 $p=-h$,且

$$m=-2k-p=4h^2+3h+1,$$

或

$$m=4h^2+5h+2,$$

代入(1)有 $n=4h^2+5h+2$ 或 $n=4h^2+3h+1$。

相应地,

$$4x^2-4y^2-z^2=3$$

的解为

$$x=\pm 2(2h^2+2h+1),$$

$$z=\pm(8h^2+8h+3),$$

$$y=2h+1。$$

假如 $w=2$,方程(3)为

$$2p^2+2p+5k-1=0$$

同上判别式必须是某一个整数 $2y$ 的平方得到:

$$k=\frac{3-y^2}{10},$$

但是在 mod 10 下,任何整数 $3-y^2$ 只能同余于 2,3,4,7,8,9,即 $\frac{3-y^2}{10}$ 不可能是一个整数。此时方程无解。

一般来说,对于任意给定的整数 w,由(4)得

$$k=\frac{w^2-y^2-1}{2(2w+1)},$$

由此可以在瓕/ {2(2w+1)瓕} 找出合适的 y,使得 k 是一个整数,若找不到这样的 y,说明原方程无解。于是从(5)解得

$$x_{1,2}=\pm\sqrt{1+y^2-\frac{1-w^2+y^2}{1+2w}+\frac{(1-w^2+y^2)^2}{(1+2w)^2}}$$

上面已证明这样的 x 必是整数,代入

$$4x^2-4y^2-z^2=3,$$

解得:

$$z_{1,2}=\pm\frac{-1+2w+2w^2-2y^2}{1+2w}$$

同样它们也是整数,或者由

$$-1+2w+2w^2-2y^2=$$

$$2(w^2-y^2-1)+2w+1=(2w+1)(4k+1)$$

也可得到。

根据这个解法,可以得知,并不是对所有 w 的取值方程都有解。一般的来说,利用软件 Mathematica,任给一个 w 都可以得到有解无解的信息,而且在有解时给出解,程序如下:

```
In[1]:=    a =
In[2]:=    b =
In[3]:=    PXM[w_]:=Position[Mod[Table[-
           (1+y^2-w^2),{y,0,Abs[2(1+2w)]
           -1}], 2(1+2w)]]],0]
In[4]:=    F[{(a_)Sqrt[u_]}]:=a*u
In[5]:=    F[{Sqrt[u_]}]:=u
In[6]:=    For[i=0; w=a; pp={}, i<Abs[b-
           a]+1, i++, pp=PXM[w]; If[pp!
           ={},
  Print[{w, y->pp-1+2(1+2w)h,
     x->{-Map[F,Sqrt[Factor[(1+y^2-(1-
         w^2+y^2)/(1+2w)+((1-w^2+y^2)^
         2)/(1+2w)^2)/ .{y->pp-1+2(1+
         2w)h}]]],
     Map  F,Sqrt[Factor[(1+y^2-(1-w^2+y^
        2)/(1+2w)+((1-w^2+y^2)^2)/(1+
        2w)^2)
    / .{y->pp-1+2(1+2w)h}]]]},
  z->Collect[{(1-2w-2w^2+2y^2)/(1+2w),
       -(1-2w-2w^2+2y^2)/(1+2w)}
    / .{y->pp-1+2(1+2w)h},h]}]];
  w=w+Sign[b-a]]
```

程序说明:首先要求输入 2 个整数,分别赋值给 a 和 b,这 2 个整数是 w 的取值范围,于是最后输出的结果就是对应于这些不同的 w 的所有解。对于输出的结果举例说明如下:若输出的某一项为

```
{3,y->{{6+14h},{8+14h}},
 x->{{-7-24h-28h^2,-11-32h-28h^2},
     {7+24h+28h^2,11+32h+28h^2}},
 z->{{{7+48h+56h^2},{15+64h+56h^2}},
     {{-7-48h-56h^2},{-15-64h-56h^
     2}}}
```

表示 $w=3$ 时,方程有解。假设 h 是任何整数,则其解分别为

{x,y,z}={-7-24h-28h^2,6+14h,7+48h+56h^2};
{7+24h+28h^2,6+14h,7+48h+56h^2};
{-7-24h-28h^2,6+14h,-7-48h-56h^2};
{7+24h+28h^2,6+14h,-7-48h-56h^2};
{-11-32h-28h^2,8+14h,15+64h+56h^2};
{11+32h+28h^2,8+14h,-15-64h-56h^2};
{11+32h+28h^2,8+14h,15+64h+56h^2};
{-11-32h-28h^2,8+14h,-15-64h-56h^2}。

若在 w 设定的范围内某个数没有出现,则说明 w 取该值时方程无解。

参考文献:

[1] 潘承洞,潘承彪.初等数论[M].北京:北京大学出版社,2003.

[2] 华罗庚.数论导引[M].北京:科学出版社,1957.

[3] 崔一敏.部分三元二次不定方程的整数解[J].首都师范大学学报:自然科学版,2001,22(1):9-18.