浙江科技学院学报,第 20 卷第 4 期,2008 年 12 月
Journal of Zhejiang University of Science and Technology
Vol.20 No.4, Dec. 2008

有限维线性空间中基的具体求法

申国伦,胡 月
(浙江科技学院 理学院,杭州 310023)

摘 要:m个n维($m<n$)线性无关向量组,如何扩充为n维线性空间V的一组基,高等代数与线性代数教材中并没有给出具体有效的方法。为此,先把待扩充的向量组用线性空间V的坐标基线性表示,然后在其表示式的系数矩阵中寻找一个m阶非零子式,则可以立即得到由$n-m$个坐标向量和原向量组组成的n维线性空间V的一组基。

关键词:线性空间;线性无关;向量;基
中图分类号:O151.2 **文献标识码**:A **文章编号**:1671-8798(2008)04-0241-03

Method of seeking basis in finite dimension linear space

SHEN Guo-lun, HU Yue
(School of Science, Zhejiang University of Science and Technology, Hangzhou 310023, China)

Abstract: How can the m linearly independent vectors group in n dimensions linear spaces V be extended to the basis of linear spaces, the concrete and valid methods are not given in the higher algebra and linear algebra textbooks. For this purpose, the coordinate basis vectors at first may be linearly represented by the vectors group which is going to extend. Then we look for a m order non-zero subdeterminant in the coefficient matrix of the above representation formula. Thus we can obtain a basis in n dimension linearly space V by combining $n-m$ coordinate vectors with the original vectors group.

Key words: linear spaces; linearly independence; vectors; basis

线性空间的理论[1-2]中指出:n维线性空间V中的一部分线性无关向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$($m<n$)必定可以扩充为线性空间V的一组基。具体如何扩充?一个直观的思路是假定向量组 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 是n维线性空间V的一组基,不妨从 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 中任取一个 ε_i 加入 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 中,考察 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m,\varepsilon_i$ 的线性关系。若线性相关,则舍弃 ε_i,并另选 ε_j 重新考察。若该向量组线性无关,则保留 ε_i 得到一个线性无关的向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m,\varepsilon_i$。重复以上过程,就可以得到V的一组基。思路虽然直观,但方法过于烦琐,计算量太大。

本文探讨了n维线性空间V中的线性无关向量组与基的关系,并找到了扩充线性无关向量组为基的一般方法,现介绍如后。

收稿日期:2008-09-10
基金项目:浙江科技学院重点教学改革课题(2005-A03)
作者简介:申国伦(1957—),男,河南浚县人,副教授,主要从事数学方法、数学软件及高等数学教育教学研究。

1　方　法

定理 1　设 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 是数域 P 上 n 维线性空间 V 的一组基，$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m(m<n)$ 为 V 中的一个线性无关向量组，于是 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 必定可以由基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 线性表出，即：存在常数 $a_{ij}(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$ 使得

$$\begin{cases}\alpha_1=a_{11}\varepsilon_1+a_{12}\varepsilon_2+\cdots+a_{1n}\varepsilon_n\\ \alpha_2=a_{21}\varepsilon_1+a_{22}\varepsilon_2+\cdots+a_{2n}\varepsilon_n\\ \quad\vdots\\ \alpha_m=a_{m1}\varepsilon_1+a_{m2}\varepsilon_2+\cdots+a_{mn}\varepsilon_n\end{cases}\tag{1}$$

则在式(1)中至少存在一个 m 阶行列式

$$D=\begin{vmatrix}a_{1i_1}&a_{1i_2}&\cdots&a_{1i_m}\\ a_{2i_1}&a_{2i_2}&\cdots&a_{2i_m}\\ \vdots&\vdots&&\vdots\\ a_{mi_1}&a_{mi_2}&\cdots&a_{mi_m}\end{vmatrix}\neq 0,$$

使得 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m,\varepsilon_{i_{m+1}},\varepsilon_{i_{m+2}},\cdots,\varepsilon_{i_n}$ 为 V 的一组基。其中 $i_1,i_2,\cdots,i_m,i_{m+1},\cdots,i_n$ 为 $1,2,\cdots,n$ 的一个排列。

证明　设

$$\sum_{i=1}^{m}k_i\alpha_i=0\quad(k_i\in P)\tag{2}$$

式(1)代入式(2)整理得

$$\left(\sum_{i=1}^{m}a_{i1}k_i\right)\varepsilon_1+\left(\sum_{i=1}^{m}a_{i2}k_i\right)\varepsilon_2+\cdots+\left(\sum_{i=1}^{m}a_{in}k_i\right)\varepsilon_n=0\tag{3}$$

又因 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 是 n 维线性空间 V 的一组基，所以 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 线性无关，故由式(3)知

$$\begin{cases}a_{11}k_1+a_{21}k_2+\cdots+a_{m1}k_m=0\\ a_{12}k_1+a_{22}k_2+\cdots+a_{m2}k_m=0\\ \quad\vdots\\ a_{1n}k_1+a_{2n}k_2+\cdots+a_{mn}k_m=0\end{cases}\tag{4}$$

又因为 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性无关，则式(2)成立的充要条件是：$k_1=k_2=\cdots=k_m=0$，从而式(4)也仅有零解。又根据齐次线性方程组仅有零解的充要条件得知式(4)的系数矩阵的秩必为 m，则在式(4)的系数矩阵中至少存在一个 m 阶行列式

$$D^T=\begin{vmatrix}a_{1i_1}&a_{2i_1}&\cdots&a_{mi_1}\\ a_{1i_2}&a_{2i_2}&\cdots&a_{mi_2}\\ \vdots&\vdots&&\vdots\\ a_{1i_m}&a_{2i_m}&\cdots&a_{mi_m}\end{vmatrix}\neq 0,$$

从而

$$D=\begin{vmatrix}a_{1i_1}&a_{1i_2}&\cdots&a_{1i_n}\\ a_{1i_1}&a_{2i_2}&\cdots&a_{2i_m}\\ \vdots&\vdots&&\vdots\\ a_{mi_1}&a_{mi_2}&\cdots&a_{mi_m}\end{vmatrix}\neq 0$$

此时式(1)同解于下列方程组

$$\begin{cases}a_{1i_1}\varepsilon_{i_1}+a_{1i_2}\varepsilon_{i_2}+\cdots+a_{1i_m}\varepsilon_{i_m}=\\ \qquad\alpha_1-(a_{1i_{m+1}}\varepsilon_{i_{m+1}}+\cdots+a_{1i_n}\varepsilon_{i_n})\\ a_{2i_1}\varepsilon_{i_1}+a_{2i_2}\varepsilon_{i_2}+\cdots+a_{2i_m}\varepsilon_{i_m}=\\ \qquad\alpha_2-(a_{2i_{m+1}}\varepsilon_{i_{m+1}}+\cdots+a_{2i_n}\varepsilon_{i_n})\\ \quad\vdots\\ a_{mi_1}\varepsilon_{i_1}+a_{mi_2}\varepsilon_{i_2}+\cdots+a_{mi_m}\varepsilon_{i_m}=\\ \qquad\alpha_m-(a_{mi_{m+1}}\varepsilon_{i_{m+1}}+\cdots+a_{mi_n}\varepsilon_{i_n})\end{cases}\tag{5}$$

即

$$A\gamma=\alpha-B\beta\tag{6}$$

其中

$$A=\begin{bmatrix}a_{1i_1}&a_{1i_2}&\cdots&a_{1i_m}\\ a_{2i_1}&a_{2i_2}&\cdots&a_{2i_m}\\ \vdots&\vdots&&\vdots\\ a_{mi_1}&a_{mi_2}&\cdots&a_{mi_m}\end{bmatrix},$$

$$B=\begin{bmatrix}a_{1i_{m+1}}&a_{1i_{m+2}}&\cdots&a_{1i_n}\\ a_{2i_{m=1}}&a_{2i_{m=2}}&\cdots&a_{2i_n}\\ \vdots&\vdots&&\vdots\\ a_{mi_{m+1}}&a_{mi_{m+2}}&\cdots&a_{mi_n}\end{bmatrix},$$

$$\gamma=\begin{bmatrix}\varepsilon_{i_1}\\ \varepsilon_{i_2}\\ \vdots\\ \varepsilon_{i_m}\end{bmatrix},\quad \alpha=\begin{bmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \vdots\\ \alpha_m\end{bmatrix},\quad \beta=\begin{bmatrix}\varepsilon_{i_{m+1}}\\ \varepsilon_{i_{m=2}}\\ \vdots\\ \varepsilon_{i_n}\end{bmatrix}$$

因为 $|A|=D\neq 0$，所以 A 可逆，由式(6)可得

$$\gamma=A^{-1}(\alpha-B\beta)\tag{7}$$

即向量组 $\varepsilon_{i_1},\varepsilon_{i_2},\cdots,\varepsilon_{i_m}$ 可由向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m,\varepsilon_{i_{m+1}},\varepsilon_{i_{m+2}},\cdots,\varepsilon_{i_n}$ 线性表示，由替换定理可知，向量组 $\varepsilon_{i_1},\varepsilon_{i_2},\cdots,\varepsilon_{i_m},\varepsilon_{i_{m+1}},\varepsilon_{i_{m+2}},\cdots,\varepsilon_{i_n}$ 与向量组 $\alpha_1,\alpha_2,$

$\cdots,\alpha_m,\varepsilon_{i_{m+1}},\varepsilon_{i_{m+2}},\cdots,\varepsilon_{i_n}$ 等价。

又因为 $\varepsilon_{i_1},\varepsilon_{i_2},\cdots,\varepsilon_{i_m},\varepsilon_{i_{m+1}},\varepsilon_{i_{m+2}},\cdots,\varepsilon_{i_n}$ 是基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 的一个重新排序,所以向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m,\varepsilon_{i_{m+1}},\varepsilon_{i_{m+2}},\cdots,\varepsilon_{i_n}$ 与基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 等价。故向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m,\varepsilon_{i_{m+1}},\varepsilon_{i_{m+2}},\cdots,\varepsilon_{i_n}$ 是 n 维线性空间 V 的一个基。

推论　设 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 是数域 P 上 n 维线性空间 V 的一组基,α 为 n 维向量。若 $\alpha = a_1\varepsilon_1 + a_2\varepsilon_2 + \cdots + a_n\varepsilon_n$,则对于 $a_i \neq 0(1 \leqslant i \leqslant n)$,向量组 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_{i-1},\alpha,\varepsilon_{i+1},\cdots,\varepsilon_n$ 为线性空间 V 的一个基。

2　举　例

例 1　把向量组 $\alpha_1 = (1,2,1,3)$,$\alpha_2 = (4,-1,-5,6)$ 扩充为 4 维线性空间的一个基。

解　因为 $\varepsilon_1 = (1,0,0,0)$,$\varepsilon_2 = (0,1,0,0)$,$\varepsilon_3 = (0,0,1,0)$,$\varepsilon_4 = (0,0,0,1)$ 为 4 维线性空间的一个基,又

$$\begin{cases}\alpha_1 = \varepsilon_1 + 2\varepsilon_2 + \varepsilon_3 + 3\varepsilon_4 \\ \alpha_2 = 4\varepsilon_1 - 1\varepsilon_2 - 5\varepsilon_3 - 6\varepsilon_4\end{cases},$$

显然系数矩阵有 2 阶子式如 $D = \begin{vmatrix}1 & 2 \\ 4 & -1\end{vmatrix} \neq 0$,则 $\alpha_1,\alpha_2,\varepsilon_3,\varepsilon_4$ 即为所求。若取 $D = \begin{vmatrix}2 & 1 \\ -1 & -5\end{vmatrix} \neq 0$,则易知 $\alpha_1,\alpha_2,\varepsilon_1,\varepsilon_4$ 即为所求。

例 2　把向量组 $f_1(x) = 1 + x^2$,$f_2(x) = x^3 - 2x^2$ 扩充为线性空间 $P[x]_4$ 中的一个基。

解　因为$\dfrac{f_1(x)}{f_2(x)} \neq k$(常数),所以 $f_1(x)$,$f_2(x)$ 线性无关。又因向量组 $1,x,x^2,x^3$ 为线性空间 $P[x]_4$ 的一个基,且

$$\begin{cases}f_1(x) = 1 + x^2 = 1 + 0x + x^2 + 0x^3 \\ f_2(x) = x^3 - 2x^2 = 0 + 0x - 2x^2 + x^3\end{cases},$$

取系数矩阵的一个 2 阶子式 $D = \begin{vmatrix}1 & 0 \\ -2 & 1\end{vmatrix} = 1 \neq 0$,则 $f_1(x)$,$f_2(x)$,1,x 即为 $P[x]_4$ 的一个基。

参考文献:

[1]　北京大学.高等代数[M].北京:高等教育出版社,2004.

[2]　张禾瑞,郝柄新.高等代数[M].北京:高等教育出版社,2003.