浙江科技学院学报,第 21 卷第 2 期,2009 年 6 月
Journal of Zhejiang University of Science and Technology
Vol.21 No.2, June 2009

具比例依赖和时滞的非自治捕食系统的正周期解

郝存生,蔡佐威,侯银莉
(中南大学 数学科学与计算技术学院,长沙 410075)

摘　要:利用重合度理论中的延拓定理,研究了一类具比例依赖和在功能性反应过程中的具时滞现象的非自治捕食周期系统,获得了正周期解的存在性。

关键词:比例依赖;捕食者-食饵;周期解;时滞;重合度
中图分类号:O175.14　　**文献标识码**:A　　**文章编号**:1671-8798(2009)02-0081-04

Positive periodic solution to nonautonomous predator-prey system with ratio-dependence

HAO Cun-sheng, CAI Zuo-wei, HOU Yin-li
(School of Mathematical Sciences and Computing Technology, Central South University, Changsha 410075, China)

Abstract: Using a continuation theorem based on coincidence degree theory, we investigated a nonautonomous predater-prey periodic system with ratio-dependence and time delay during the process of the functional response and obtained existence of positive periodic solution.

Key words: ratio-dependent; predator-prey; periodic solution; time delay; coincidence degree

捕食者-食饵系统在生态学中具有重要意义,因而近几年来受到了生物学家和数学家们的广泛关注,尤其是对具功能性反应的生态系统的研究。他们利用 Mawhin 重合度理论,做了很多有意义的工作[1-6]。

本文在文献[1]中模型(3.6)的基础上,同样利用 Mawhin 重合度理论研究了周期系数具比例依赖和时滞的非自治捕食系统:

$$\begin{cases} x_1{}' = r_1(t)x_1\left(1-\dfrac{x_1+x_2}{k(t)}\right)-y\dfrac{c_1(t)x_1^2}{(b(t)+a(t)y+x_1+m(t)x_2)(x_1+m(t)x_2)} \\ x_2{}' = r_2(t)x_2\left(1-\dfrac{x_1+x_2}{k(t)}\right)-y\dfrac{c_2(t)m^2(t)x_2^2}{(b(t)+a(t)y+x_1+m(t)x_2)(x_1+m(t)x_2)} \\ y' = y\left(-d(t)+\dfrac{e_1(t)c_1(t)x_1^2(t-\tau)}{(b(t)+a(t)y(t-\tau)+x_1(t-\tau)+m(t)x_2(t-\tau))(x_1(t-\tau)+m(t)x_2(t-\tau))}\right. \\ \qquad\left.+\dfrac{e_2(t)c_2(t)m^2(t)x_2^2(t-\tau)}{(b(t)+a(t)y(t-\tau)+x_1(t-\tau)+m(t)x_2(t-\tau))(x_1(t-\tau)+m(t)x_2(t-\tau))}\right) \end{cases} \tag{1}$$

收稿日期:2009-03-01
作者简介:郝存生(1984—　),男,河南确山人,硕士研究生,研究方向为应用数学。

其中 $x_1(t)$ 和 $x_2(t)$ 表示两食饵种群在 t 时刻的密度，$y(t)$ 表示捕食种群在 t 时刻的密度 $a(t),b(t),c_i(t),d(t),e_i(t),k(t),m(t),r_i(t)(i=1,2)$ 为$[0,+\infty)$上的连续的严格正函数，且具有正的上、下界，τ为正常数，得到了正周期解的存在性。

关于系统(1)的生态学意义可以参看文献[1]。文献[1]中作者对种群数学模型的基本性质进行了介绍，提出了一个具比例依赖的自治系统，然而由于时滞现象在自然界时常有发生，故而本文的系统(1)延拓了文献[1]中模型(3.6)。

1　预备知识

首先引入重合度中的延拓定理。

设 X,Z为2个Banach空间，L:Dom$L\subset X\to Z$是线性映射，$N:X\to Z$是连续映射。如果 $\dim\mathrm{Ker}L=\mathrm{Co}\dim\mathrm{Im}L<+\infty$且Im$L$是$Z$中的闭子集，则称映射 L 为指标为零的 Fredholm 映射。

如果 L 是指标为零的 Fredholm 映射且存在连续投影映射 $P:X\to X$以及 $Q:Z\to Z$使得Im$P=$Ker$L$，Im$L=$Ker$Q=$Im$(I-Q)$，则 $L\mid \mathrm{Dom}L\cap\mathrm{Ker}P:(I-P)X\to\mathrm{Im}L$可逆，设其逆映射为 K_p，设 Ω为 X中的有界开集，如果 $QN(\bar{\Omega})$有界且 $K_p(I-Q)N:\bar{\Omega}\to X$是紧的，则称 N在 $\bar{\Omega}$上是 L-紧的。由于ImQ与Ker$L$同构，因而存在同构映射 J:Im$Q\to$Ker$L$。

引理1(Mawhin 延拓定理)[7]　设 L 是一个指标为零的 Fredholm 映射，$N:\bar{\Omega}\to Z$在 $\bar{\Omega}$上是 L-紧的，其中 $\Omega\subset X$ 为非空有界开集，假设：

(a) 对任意的 $x\in\partial\Omega\cap\mathrm{Dom}L$，有 $Lx\neq\lambda Nx$，$\lambda\in(0,1)$；

(b) 对任意的 $x\in\mathrm{Ker}L\cap\partial\Omega, QNx\neq 0$；

(c) $\deg(JQN,\Omega\cap\mathrm{Ker}L,0)\neq 0$。

则抽象方程 $Lx=Nx$ 在 Dom$L\cap\bar{\Omega}$内至少存在一个解。

为了讨论方便，对连续的正 ω-周期函数 $g(t)$，引入记号

$$\bar{g}\triangleq\frac{1}{\omega}\int_0^{\omega}g(t)\mathrm{d}t,$$

$$g^L\triangleq\inf_{t\in[0,\omega]}\{g(t)\},$$

$$g^M\triangleq\sup_{t\in[0,\omega]}\{g(t)\}$$

2　正周期解的存在性

定理1　设系统(1)的系数函数满足下列条件：

$$T_1:\bar{r}_1K^L-r_1^MA-\overline{\left(\frac{c_1}{a}\right)}K^L>0;$$

$$T_2:\bar{r}_2K^L-r_2^MA-\overline{\left(\frac{c_2m}{a}\right)}K^L>0;$$

$$T_3:e_2^Lc_2^L(m^L)^2e^{d_2-h_2}-\bar{d}(1+m^M)(b^M+e^{R_1}+m^Me^{R_2})>0;$$

$$T_4:e_1^Lc_1^Le^{d_1-h_1}-\bar{d}(1+m^M)(b^M+e^{R_1}+m^Me^{R_2})>0,$$

其中$A=\max\left\{\frac{r_1^MK^M}{r_1^L},\frac{r_2^MK^M}{r_2^L}\right\}$，

$$R_1=\max\{Ln\mid A\mid+h_1,\mid d_1\mid+h_1\},$$

$$R_2=\max\{Ln\mid A\mid+h_2,\mid d_2\mid+h_2\},$$

$$h_1=2\bar{r}_1\omega,$$

$$h_2=2\bar{r}_2\omega,$$

$$d_1=\ln\frac{\omega\bar{r}_1k^L-\omega r_1^MA-\omega\overline{\left(\frac{c_1}{a}\right)}k^L}{r_1^M},$$

$$d_2=\ln\frac{\omega\bar{r}_2k^L-\omega r_2^MA-\omega\overline{\left(\frac{c_2m}{a}\right)}k^L}{r_2^M}$$

则系统(1)至少存在一个正的 ω-周期解。

证明　作变换

$$x_i(t)=\exp[u_i(t)],$$

$$y(t)=\exp[v(t)],(i=1,2),\tag{2}$$

则系统(1)转化为

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}u_1(t)}{\mathrm{d}t}=r_1(t)\left(1-\dfrac{\mathrm{e}^{u_1(t)}+\mathrm{e}^{u_2(t)}}{k(t)}\right)-\mathrm{e}^{v(t)}\dfrac{c_1(t)\mathrm{e}^{u_1(t)}}{(b(t)+a(t)\mathrm{e}^{v(t)}+\mathrm{e}^{u_1(t)}+m(t)\mathrm{e}^{u_2(t)})(\mathrm{e}^{u_1(t)}+m(t)\mathrm{e}^{u_2(t)})}\\ \dfrac{\mathrm{d}u_2(t)}{\mathrm{d}t}=r_2(t)\left(1-\dfrac{\mathrm{e}^{u_1(t)}+\mathrm{e}^{u_2(t)}}{k(t)}\right)-\mathrm{e}^{v(t)}\dfrac{c_2(t)m^2(t)\mathrm{e}^{u_2(t)}}{(b(t)+a(t)\mathrm{e}^{v(t)}+\mathrm{e}^{u_1(t)}+m(t)\mathrm{e}^{u_2(t)})(\mathrm{e}^{u_1(t)}+m(t)\mathrm{e}^{u_2(t)})}\\ \dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=-d(t)+\dfrac{e_1(t)c_1(t)\mathrm{e}^{2u_1(t-\tau)}}{(b(t)+a(t)\mathrm{e}^{v(t-\tau)}+\mathrm{e}^{u_1(t-\tau)}+m(t)\mathrm{e}^{u_2(t-\tau)})(\mathrm{e}^{u_1(t-\tau)}+m(t)\mathrm{e}^{u_2(t-\tau)})}+\\ \qquad\dfrac{e_2(t)c_2(t)m^2(t)\mathrm{e}^{2u_2(t-\tau)}}{(b(t)+a(t)\mathrm{e}^{v(t-\tau)}+\mathrm{e}^{u_1(t-\tau)}+m(t)\mathrm{e}^{u_2(t-\tau)})(\mathrm{e}^{u_1(t-\tau)}+m(t)\mathrm{e}^{u_2(t-\tau)})}\end{cases}\tag{3}$$

显然，如果系统(3)有一个 ω-周期解 $(u_1^*(t),u_2^*(t),v^*(t))^{\mathrm{T}}$，那么 $(x_1^*(t),x_2^*(t),y^*(t))^{\mathrm{T}}=(\exp\{u_1^*(t)\},\exp\{u_2^*(t)\},\exp\{v^*(t)\})^{\mathrm{T}}$ 就是系统(1)的一个 ω-周期解。所以只需证明系统(3)有一

个 ω-周期解。设

$X = Z = \{(u_1(t), u_2(t), v(t))^{\mathrm{T}} \in C(R, R^3) \mid u_i(t+\omega) = u_i(t), v(t+\omega) = v(t))(i = 1,2)\}$

$\|(u_1(t), u_2(t), v(t))^{\mathrm{T}}\| = \sum_{i=1}^{2} \max_{t\in[0,\omega]} |u_i(t)| + \max_{t\in[0,\omega]} |v(t)|$,则 X, Z 在 $\|\cdot\|$ 下成为Banach空间。

令 $L: \mathrm{Dom}L \cap X \to Z, L(u_1(t), u_2(t), v(t))^{\mathrm{T}} = \left(\frac{\mathrm{d}u_1(t)}{\mathrm{d}t}, \frac{\mathrm{d}u_2(t)}{\mathrm{d}t}, \frac{\mathrm{d}v(t)}{\mathrm{d}t}\right)^{\mathrm{T}}$

其中 $\mathrm{Dom}L = \{(u_1(t), u_2(t), v(t))^{\mathrm{T}} \in C^1(R, R^3)\}$;$N: X \to X$;

$$N\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_1(t)\left(1 - \frac{e^{u_1(t)} + e^{u_2(t)}}{k(t)}\right) - \frac{c_1(t)e^{u_1(t)}e^{v(t)}}{(b(t) + a(t)e^{v(t)} + e^{u_1(t)} + m(t)e^{u_2(t)})(e^{u_1(t)} + m(t)e^{u_2(t)})} \\ r_2(t)\left(1 - \frac{e^{u_1(t)} + e^{u_2(t)}}{k(t)}\right) - \frac{c_2(t)m^2(t)e^{u_2(t)}e^{v(t)}}{(b(t) + a(t)e^{v(t)} + e^{u_1(t)} + m(t)e^{u_2(t)})(e^{u_1(t)} + m(t)e^{u_2(t)})} \\ -d(t) + \frac{e_1(t)c_1(t)e^{2u_1(t-\tau)}}{(b(t) + a(t)e^{v(t-\tau)} + e^{u_1(t-\tau)} + m(t)e^{u_2(t-\tau)})(e^{u_1(t-\tau)} + m(t)e^{u_2(t-\tau)})} + \\ \frac{e_2(t)c_2(t)m^2(t)e^{2u_2(t-\tau)}}{(b(t) + a(t)e^{v(t-\tau)} + e^{u_1(t-\tau)} + m(t)e^{u_2(t-\tau)})(e^{u_1(t-\tau)} + m(t)e^{u_2(t-\tau)})} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1(t) \\ N_2(t) \\ N_3(t) \end{bmatrix}$$

定义映射 P 和 Q 分别为:

$$P(u_1, u_2, v)^{\mathrm{T}} = Q(u_1, u_2, v)^{\mathrm{T}} = \left(\frac{1}{\omega}\int_0^\omega u_1(t)\mathrm{d}t, \frac{1}{\omega}\int_0^\omega u_2(t)\mathrm{d}t, \frac{1}{\omega}\int_0^\omega v(t)\mathrm{d}t\right)^{\mathrm{T}}$$

$(u_1, u_2, v)^{\mathrm{T}} \in X = Z$,则

$\mathrm{Ker}L = \{(u_1, u_2, v)^{\mathrm{T}} \in X \mid (u_1, u_2, v)^{\mathrm{T}} = (u_1^0, u_2^0, v^0)^{\mathrm{T}} \in R^3\}$,

$$\mathrm{Im}L = \{(u_1, u_2, v)^{\mathrm{T}} \in Z \mid \int_0^\omega u_i(t)\mathrm{d}t = 0, \int_0^\omega v(t)\mathrm{d}t = 0 (i = 1,2)\}$$

于是 $\dim\mathrm{Ker}L = \mathrm{Co}\dim\mathrm{Im}L$,由于 $\mathrm{Im}L$ 是 Z 中的闭子集,故 L 是指标为零的 Fredholm 算子。易证 P, Q 是连续投影算子,且使得 $\mathrm{Im}P = \mathrm{Ker}L, \mathrm{Im}L = \mathrm{Ker}Q = \mathrm{Im}(I - Q)$,因此 L 的逆映射 $K_p: \mathrm{Im}L \to \mathrm{Ker}P \cap \mathrm{Dom}L$ 存在,且 $K_p(u) = \int_0^t u(s)\mathrm{d}s - \frac{1}{\omega}\int_0^\omega\int_0^t u(s)\mathrm{d}s\mathrm{d}t$,其中 $u = (u_1, u_2, v)^{\mathrm{T}}$。$QN: X \to Z$ 和 $K_p(I - Q)N: X \to X$ 分别为:

$$QNu = \left(\frac{1}{\omega}\int_0^\omega N_1(t)\mathrm{d}t, \frac{1}{\omega}\int_0^\omega N_2(t)\mathrm{d}t, \frac{1}{\omega}\int_0^\omega N_3(t)\mathrm{d}t\right)^{\mathrm{T}}$$

$$K_p(I - Q)Nu = \begin{bmatrix} \int_0^t N_1(s)\mathrm{d}s \\ \int_0^t N_2(s)\mathrm{d}s \\ \int_0^t N_3(s)\mathrm{d}s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{1}{\omega}\int_0^\omega\int_0^t N_1(s)\mathrm{d}s\mathrm{d}t \\ \frac{1}{\omega}\int_0^\omega\int_0^t N_2(s)\mathrm{d}s\mathrm{d}t \\ \frac{1}{\omega}\int_0^\omega\int_0^t N_3(s)\mathrm{d}s\mathrm{d}t \end{bmatrix} - \left(\frac{t}{\omega} - \frac{1}{2}\right)\begin{bmatrix} \int_0^\omega N_1(s)\mathrm{d}s \\ \int_0^\omega N_2(s)\mathrm{d}s \\ \int_0^\omega N_3(s)\mathrm{d}s \end{bmatrix}$$

利用 Lebesgue 收敛定理可以证明 QN 和 $K_p(I - Q)N$ 是连续的,利用 Arzela-Ascoli 定理不难证明对任意开的有界子集 $\Omega \subset X$,$QN(\bar{\Omega})$ 及 $\overline{K_p(I - Q)N(\bar{\Omega})}$ 是紧的,因此 N 在 $\bar{\Omega}$ 上是 L-紧的。对应于算子方程 $Lu = \lambda Nu, \lambda \in (0,1)$ 有

$$\frac{\mathrm{d}u_1(t)}{\mathrm{d}t} = \lambda N_1(t),$$

$$\frac{\mathrm{d}u_2(t)}{\mathrm{d}t} = \lambda N_2(t),$$

$$\frac{\mathrm{d}v(t)}{\mathrm{d}t} = \lambda N_3(t)。\tag{4}$$

经推理有:

$\max_{t\in[0,\omega]} |u_1(t)| < \max\{|\ln A| \geqslant + h_1, |d_1| + h_1\} \triangleq R_1$;

$\max_{t\in[0,\omega]} |u_2(t)| < \max\{|\ln A| + h_2, |d_2| + h_2\} \triangleq R_2$;

$\max_{t\in[0,\omega]} |v(t)| < \max\{|\ln p| + h_3, |\ln q| + h_3\} \triangleq R_3$。

显然 R_1, R_2, R_3 与 λ 无关。

对于 R^3 中的常值向量 $\boldsymbol{u} = (u_1, u_2, v)^{\mathrm{T}}$,利用积分中值定理知,存在 $\theta_1, \theta_2, \delta_1, \delta_2 \in [0, \omega]$,使得 $QNu = (S_1(u) + W_1(u), S_2(u) + W_2(u), S_3(u) + W_3(u))^{\mathrm{T}}$,其中

$$S_1(u) = \bar{r}_1 - \overline{\left(\frac{r_1}{k}\right)} e^{u_1};$$

$$S_2(u) = \bar{r}_2 - \overline{\left(\frac{r_2}{k}\right)} e^{u_2};$$

$$S_3 = -\bar{d}_3 + \frac{\overline{e_1 c_1} e^{2u_1}}{(b(\delta_1) + a(\delta_1)e^v + e^{u_1} + m(\delta_1)e^{u_2})(e^{u_1} + m(\delta_1)e^{u_2})};$$

$$W_1(u) = -\overline{\left(\frac{r_1}{k}\right)} e^{u_2} - \frac{\bar{c}_1 e^{u_1} e^v}{(b(\theta_1) + a(\theta_1)e^v + e^{u_1} + m(\theta_1)e^{u_2})(e^{u_1} + m(\theta_1)e^{u_2})};$$

$$W_2(u) = -(\overline{\frac{r_2}{k}})e^{u_1} - \frac{\overline{c_2 m^2} e^{u_2} e^{v}}{(b(\theta_2) + a(\theta_2)e^{v} + e^{u_1} + m(\theta_2)e^{u_2})(e^{u_1} + m(\theta_2)e^{u_2})};$$

$$W_3 = \frac{\overline{e_2 c_2 m^2} e^{2u_2}}{(b(\delta_2) + a(\delta_2)e^{v} + e^{u_1} + m(\delta_2)e^{u_2})(e^{u_1} + m(\delta_2)e^{u_2})}。$$

令 $K = R_1 + R_2 + R_3 + R_0$，取 R_0 充分大使得 $QNu = 0$ 的每一个正解 $(u_1^*, u_2^*, v^*)^{\mathrm{T}} \in R_+^3$ 满足 $\|(u_1^*, u_2^*, v^*)^{\mathrm{T}}\| = |u_1^*| + |u_2^*| + |v^*| < K$。

令 $\Omega = \{u = (u_1(t), u_2(t), v(t))^{\mathrm{T}} \in X \mid \|u\| < K\}$，此时引理 1 的条件(*a*)满足。

当 $\boldsymbol{u} \in \partial\Omega \cap \mathrm{Ker}L = \partial\Omega \cap R^3$ 时，$\boldsymbol{u}$ 是 R^3 中的一个常值向量，且 $\|u\| = K$，于是 $QNu \neq 0$，此时引理 1 的条件(*b*)满足。

构造同伦映射：

$\varphi: \mathrm{Dom}L \times [0,1] \to X$，$\varphi(u,\lambda) = (s_1(u), s_2(u), s_3(u))^{\mathrm{T}} + \lambda(w_1(u), w_2(u), w_3(u))^{\mathrm{T}}$

其中 $\lambda \in [0,1]$，常值向量 $\boldsymbol{u} \in \partial\Omega \cap \mathrm{Ker}L = \partial\Omega \cap R^3$，且 $\|u\| = K$。当 $\boldsymbol{u} \in \partial\Omega \cap \mathrm{Ker}L = \partial\Omega \cap R^3$ 时，必有 $\varphi(u,\lambda) \neq 0$。易知方程 $QNu = \varphi(u,0) = 0$ 有唯一解。不妨记为 $(u_1^*, u_2^*, v^*)^{\mathrm{T}}$，可取 J 为恒同映射，即 $J = I: \mathrm{Im}L \to \mathrm{Ker}L$，则有 $JQNu = QNu = 0$ 有唯一解 $(u_1^*, u_2^*, v^*)^{\mathrm{T}}$。由 Brower 度的同伦不变性可得：

$$\deg(JQNu, \Omega \cap \mathrm{Ker}L, 0) = \deg(\varphi(u,1), \Omega \cap \mathrm{Ker}L, 0) = \deg(\varphi(u,0), \Omega \cap \mathrm{Ker}L, 0) =$$

$$\mathrm{sgn}\left\{\det\begin{bmatrix} -\overline{\left(\frac{r_1}{k}\right)} e^{u_1^*} & 0 & 0 \\ 0 & -\overline{\left(\frac{r_2}{k}\right)} e^{u_2^*} & 0 \\ \frac{2\overline{e_1 c_1} u^{2u_1^*} E - \overline{e_1 c_1} e^{3u_1^*} G}{E^2} & \frac{-\overline{e_1 c_1 m(\delta_1)} e^{2u_1^*} e^{u_2^*}}{E^2} & \frac{-\overline{e_1 c_1 a(\delta_1)} e^{2u_1^*} e^{v^*} F}{E^2} \end{bmatrix}\right\} = -1 \neq 0。$$

其中：

$$E = (b(\delta_1) + a(\delta_1)e^{v^*} + e^{u_1^*} + m(\delta_1)e^{u_2^*})(e^{u_1^*} + m(\delta_1)e^{u_2^*}), F = e^{u_1^*} + m(\delta_1)e^{u_2^*},$$

$$G = (b(\delta_1) + a(\delta_1)e^{v^*} + 2e^{u_1^*} + 2m(\delta_1)e^{u_2^*})。$$

此时引理 1 的条件(*c*)满足。

根据引理 1(Mawhin 延拓定理)可知 $Lx = Nx$ 在 $\mathrm{Dom}L \cap \overline{\Omega}$ 内至少存在一个解，即系统(3)在 $\overline{\Omega}$ 中至少存在一个 ω-周期解，从而系统(1)至少存在一个正的 ω-周期解。证毕。

3 结 语

本文已证明了系统(1)的正周期解的存在性，但关于系统(1)的一致持久性和全局渐进稳定性，目前还没有解决，这正是笔者下一步需要做的工作。

参考文献：

[1] KUANG Y. Basic properties of mathematical population models[J]. Biomathematics, 2002, 17(2): 129-142.

[2] 熊友兵，李红智. 具有时滞及 Beddington-DeAngelis 功能性反应的食物链系统周期解存在性与全局渐近稳定性[J]. 系统科学与数学，2008，28(3)：288-301.

[3] 房辉，曹进德. 一类捕食者-食饵系统周期正解的全局存在性[J]. 生物数学学报 2000，15(4)：403-407.

[4] 陈晓星，陈凤德，张惠英. 非自治具有Ⅱ类功能性反应的竞争捕食系统的周期解[J]. 生物数学学报，2006，21(3)：351-358.

[5] 丁孝全，程述汉. Gause 比率依赖型捕食者-食饵系统的周期解[J]. 生物数学学报，2006，21(2)：184-190.

[6] 张少林，韦明俊. 一类食饵有阶段结构的时滞 predator-prey 系统的周期解[J]. 浙江科技学院学报，2006，18(1)：1-7.

[7] GAINES R E, MAWHIN J L. Comcidence Degree and Nonlinear Differential Equations[M]. Berlin: Springer-Verag, 1977.