浙江科技学院学报,第 21 卷第 2 期,2009 年 6 月
Journal of Zhejiang University of Science and Technology
Vol.21 No.2, June 2009

一个游戏问题的推广与数学建模

胡英武
(金华职业技术学院 师范学院,浙江 金华 321017)

摘　要:对一个数学游戏问题进行了一般性推广,运用有限域上线性方程组的理论,研究了该问题的操作可行性判定方法与最优策略,给出了数学模型,并对模型进行了评价。

关键词:有限域;初始控制矩阵;最终效果矩阵
中图分类号:O141.4　　**文献标识码**:A　　**文章编号**:1671-8798(2009)02-0085-03

Popularization and mathematical modeling of a game question

HU Ying-wu
(Normal School, Jinhua College of Profession and Technology, Jinhua 321017, China)

Abstract: We popularize a question of mathematical game with generality and apply the theory of linear systems of equations on finite field to study the question on how to judge the operational feasibility and its best strategy. The mathematical model is established and the evaluation to it is also made.

Key words: finite field; initial control matrix; final effect matrix

在 2009 年浙江省公务员录用考试的行政职业能力测验试卷中有这样一个考题:现有 6 个一元面值硬币正面朝上放在桌子上,你可以每次翻转 5 个硬币(必须翻转 5 个),问最少经过几次翻转可以使这 6 个硬币全部反面朝上?经过简单的尝试可知至少翻转 6 次。现在考虑一般情形:现有 n 个一元面值硬币放在桌子上(每个硬币要么正面朝上,要么反面朝上),你可以每次翻转 m 个硬币(必须翻转 m 个,$m < n$,m 不整除 n),问经有限次翻转可否使这 n 个硬币全部反面朝上?若可以,则求出最优翻转策略;若不行,给出理由。

本文利用有限域上的线性空间理论,研究了 n 个一元硬币从任一初始状态能否经有限次翻转变成终止状态的操作可行性判定方法,以及操作可行时的最优策略,将该问题归结为有限域上线性方程组解的存在性问题。

1　模型的建立

定义 1　若 $a_{ij} \in \{0,1\}$,则称矩阵 $\boldsymbol{A}_{m\times n} = (a_{ij})$ 为 $m\times n$ 阶的二进制矩阵[1]。特别地,$1\times n$ 阶的二进

收稿日期:2009-03-18
基金项目:金华职业技术学院青年基金项目(2006-qn-16)
作者简介:胡英武(1975—　),男,浙江武义人,讲师,硕士,主要从事数学建模与数理统计的教学与研究。

制矩阵称为 n 维二进制向量。

若用0代表硬币正面朝上,1代表反面朝上,并且将硬币按1,2,…,n进行编号,则 n个硬币的任一状态对应于一个 n维的二进制向量 $\boldsymbol{S}=(s_1,s_2,\cdots,s_n)$,$s_i\in\{0,1\}$,$i=1,2,\cdots,n$,称此向量$\boldsymbol{S}$为硬币的状态向量。

若记 $k=C_n^m$,则从 n个硬币中每次选取 m 个翻转的种数为 k。每一次翻转都与一个 m 个分量为1,$(n-m)$个分量为0的 n维二进制向量 $\boldsymbol{L}_i=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$,$(i=1,2,\cdots,k)$相对应,分量为1的硬币翻动,分量为0的硬币不翻动。

定义2 称上述 n维二进制向量 $\boldsymbol{L}_i=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$,$(i=1,2,\cdots,k)$为第 i种翻转 m 个硬币的初始控制向量。

称由初始控制向量 $\boldsymbol{L}_i$ 为行向量构成的二进制矩阵 $\boldsymbol{A}$ 为初始控制矩阵。

定义3 设 $F_2=\{0,1\}$,F_2上定义四则运算,其运算法则如下:

$\oplus$	0	1
0	0	1
1	1	0

$-$	0	1
0	0	1
1	1	0

$\otimes$	0	1
0	0	0
1	0	1

$\div$	0	1
0	无意义	0
1	无意义	1

显然,$F_2=\{0,1\}$对于上述运算构成一个域(称此域为二元有限域)。

定义4 设 $\boldsymbol{V}_1=(b_1,b_2,\cdots,b_n)$,$\boldsymbol{V}_2=(c_1,c_2,\cdots,c_n)$是2个 n维二进制向量,定义 $\boldsymbol{V}_1+\boldsymbol{V}_2=(b_1\oplus c_1,b_2\oplus c_2,\cdots,b_n\oplus c_n)$,称此运算为 n维二进制向量加法。$k\in F_2$,定义 $k\cdot\boldsymbol{V}_1=(k\otimes b_1,k\otimes b_2,\cdots,k\otimes b_n)$,称此运算为 n维二进制向量数乘。

显然,对于这样定义的 n维二进制向量的加法与数乘,有:

定理1[2] 设 $\boldsymbol{V}$是所有 n维二进制向量组成的集合,$F_2=\{0,1\}$,则对于 n维二进制向量的加法与数乘,$\boldsymbol{V}$是数域 F_2 上的向量空间。

对于 n个硬币的某一状态 $\boldsymbol{S}_j$,在实施第 i种翻转后,转移到另一种状态 $\boldsymbol{S}_i$ 这一过程可表为:

$$\boldsymbol{S}_i=\boldsymbol{S}_j+1\cdot\boldsymbol{L}_i$$

又由"+,$\oplus$"的运算性质有:$1\cdot\boldsymbol{L}_i+1\cdot\boldsymbol{L}_i=\boldsymbol{O}$可知,实施第 i种翻转2次或偶数次,此操作的作用将抵消,为使翻转次数尽可能少,这种重复操作应取消。因此,在任何一种翻转最多实施一次的条件下寻找最优策略。

到此,笔者给出该问题的数学模型如下:

已知 n个硬币的初始状态向量 $\boldsymbol{S}_0$,终止状态向量 $\boldsymbol{S}_1$ 和初始控制矩阵 $\boldsymbol{A}$。通过翻转能否将 $\boldsymbol{S}_0$ 变成 $\boldsymbol{S}_1$ 的可行性判别方法与最优策略归结为有限域 F_2 上方程组解的存在问题。

即,是否存在

$$\boldsymbol{X}=(x_1,x_2,\cdots,x_k)^{\mathrm{T}},x_i\in F_2,(i=1,2,\cdots,k)$$

使

$$\boldsymbol{S}_0+x_1\cdot\boldsymbol{L}_1+x_2\cdot\boldsymbol{L}_2+\cdots+x_k\cdot\boldsymbol{L}_k=\boldsymbol{S}_1 \quad (1)$$

也即

$$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}=(\boldsymbol{S}_0+\boldsymbol{S}_1)^{\mathrm{T}} \quad (2)$$

如果存在这样的 $\boldsymbol{X}$,那么经有限次翻转可使 n个硬币从 $\boldsymbol{S}_0$ 变到 $\boldsymbol{S}_1$,由解中等于1的 x_i 所对应的$\boldsymbol{L}_i$即可得翻转策略,解中1的个数就是最少翻转次数。否则,不能。

2 模型的求解

这样就将问题转化成了线性方程组(2)的求解问题。由 F_2 上的线性方程组解的存在性理论[3]判定方程组(2)解的存在问题,若方程组(2)有解,则用初等行变换法求出解。

定义5 将初始控制矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 行加到(按 n维二进制向量加法)第 j 行,称这种变换为二进制矩阵的复合变换,记为 $\boldsymbol{L}_j+\boldsymbol{L}_i$。初始控制矩阵$\boldsymbol{A}$经过一系列复合变换得到的最简阶梯型矩阵 $\boldsymbol{Q}$称为$\boldsymbol{A}$ 的最终效果矩阵。

定理2[2] 设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_r$是 r个线性无关的n维二进制向量,则由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_r$ 生成的子空间 $\boldsymbol{V}(\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_r)$总共含有 2^r 个不同的向量。

推论 如果初始控制矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩为 r,则

1)经有限次翻转可使 n 个硬币达到 2^r 种不同的状态,反之亦然。

2)经有限次翻转可使 n 个硬币达到所有可能状态的 $\frac{2^r}{2^n}$。特别地,当且仅当 $r=n$ 时,对任一给定初始状态可以达到任意终止状态。

推论说明,n 个硬币所能达到的状态由初始控制矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩唯一决定。

定理 3[2]　设初始控制阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩为 r,$\boldsymbol{Q}$ 是初始控制阵 $\boldsymbol{A}$ 的最终效果矩阵,$\boldsymbol{S}_0$,$\boldsymbol{S}_1$ 分别为 n 个硬币的初始状态向量和终止状态向量,$\boldsymbol{Q}_1$,$\boldsymbol{Q}_2$,…,$\boldsymbol{Q}_r$ 是最终效果矩阵 $\boldsymbol{Q}$ 的非零行向量,则游戏可从初始状态 $\boldsymbol{S}_0$ 变到终止状态 $\boldsymbol{S}_1$ 的充分必要条件为:存在 $x_i \in F_2(i=1,2,\cdots,r)$,使

$$\boldsymbol{S}_0+\boldsymbol{S}_1=x_1\cdot\boldsymbol{Q}_1+x_2\cdot\boldsymbol{Q}_2+\cdots+x_r\cdot\boldsymbol{Q}_r$$

下面给出原问题的可行性判别与求解方法。

1)通过一系列复合变换将初始控制阵 $\boldsymbol{A}$ 变为最终效果阵 $\boldsymbol{Q}$,于是得到最终效果阵 $\boldsymbol{Q}$ 的 r 个非零行向量 $\boldsymbol{Q}_1$,$\boldsymbol{Q}_2$,…,$\boldsymbol{Q}_r$。

2)令

$$\boldsymbol{S}_0+\boldsymbol{S}_1=x_1\cdot\boldsymbol{Q}_1+x_2\cdot\boldsymbol{Q}_2+\cdots+x_r\cdot\boldsymbol{Q}_r$$

若此组合式有解,则 n 个硬币能从初始状态 $\boldsymbol{S}_0$ 变成终止状态 $\boldsymbol{S}_1$;否则,不能。

3)如果 n 个硬币能从初始状态 $\boldsymbol{S}_0$ 变成终止状态 $\boldsymbol{S}_1$,则根据步骤 2)的解中等于 1 的 x_i 所对应的 $\boldsymbol{Q}_i$ 即可得翻转策略。

3　模型评价

该模型可用于解决类似的状态控制问题(如文献[1]),方法上易于推广。

模型的缺点是如果控制矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的阶较大,那么求最终效果阵 $\boldsymbol{Q}$ 及解组合式

$$\boldsymbol{S}_0+\boldsymbol{S}_1=x_1\cdot\boldsymbol{Q}_1+x_2\cdot\boldsymbol{Q}_2+\cdots+x_r\cdot\boldsymbol{Q}_r$$

的过程比较繁琐。

参考文献:

[1]　程德文,张建涛.一个游戏难题的数学建模与求解[J].数学的实践与认识,2005,35(8):1-4.

[2]　冯克勤.有限域[M].长沙:湖南教育出版社,1998.

[3]　谢邦杰.抽象代数学[M].上海:上海科学技术出版社,1982.