浙江科技学院学报,第 22 卷第 3 期,2010 年 6 月
Journal of Zhejiang University of Science and Technology
Vol.22 No.3, June 2010

DOI: 10.3969/j.issn.1671-8798.2010.03.002

泰勒中值定理在不等式证明中的应用

严永仙
(浙江科技学院 理学院,杭州 310023)

摘　要:从不等式的特点出发,应用实际范例给出了泰勒公式中展开点选取的几种情况:区间的中点,已知区间的两端点,函数的极值点或最值点,已知区间的任意点。同时对各种情况的运用范围和特点作了说明,以便更好地运用泰勒中值定理证明不等式。

关键词:泰勒中值定理;不等式;定积分;展开点
中图分类号:O172　　**文献标识码**:A　　**文章编号**:1671-8798(2010)03-0164-06

Application of Taylor's mean value theorem in proof of inequalities

YAN Yong-xian
(School of Science, Zhejiang University of Science and Technology, Hangzhou 310023, China)

Abstract: From the characteristics of the inequality, the selected situations of the expansion point in Taylor formula are given by means of practical examples: a mid-point of the range, two endpoints of the known range, the extreme points of the function or the most data points of the function, and any point at the known range. The characteristics and scope of application in various cases are also explained in order to make better use of Taylor's mean value theorem to prove inequality.

Key words: Taylor's mean value theorem; inequality; definite integral; expansion points

不等式的证明不仅形式多种多样,而且证明方法多变,常见的方法有:利用函数的单调性证明,利用微分中值定理证明,利用函数的极值或最值证明等。在众多方法中,利用函数的单调性、拉格朗日中值定理证明不等式,学生还能理解和掌握[1-4];但利用泰勒中值定理证明不等式(尤其是某些含抽象函数的不等式)比较困难,无从入手,思维受阻。探究其原因:一是泰勒中值定理的内容本身难理解;二是用此法证明不等式对泰勒公式中展开点 x_0 的选取很有讲究,需要因势而变。有关这些内容,一般的高等数学教材及文献很少涉及,然而,利用泰勒中值定理证明某些含抽象函数的不等式,其优势是其他方法无可替代的。那么能否

收稿日期:2010-01-08
基金项目:浙江科技学院教学研究项目(200911B-a52)
作者简介:严永仙(1966—　),女,浙江临安人,副教授,主要从事高等数学的教学与研究。

找到一个有效的方法和技巧来掌握泰勒公式中展开点 x_0 的选取呢?笔者通过长期的探讨发现,泰勒公式中展开点 x_0 的选取还是有一定规律的。本文的目的是应用一些实际范例来归纳泰勒公式中展开点 x_0 的选取规律,同时对各种情况的运用范围和特点作出说明,以便更好地运用泰勒中值定理来证明不等式。

1　泰勒中值定理的内容

泰勒中值定理[5]　如果函数 $f(x)$ 在含有 x_0 的开区间 (a,b) 内有直到 $n+1$ 阶导数,则对任一点 $x_0\in(a,b)$,有

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

其中 ξ 是 x_0 与 x 之间的某个值,上式称为 $f(x)$ 按 $(x-x_0)$ 的幂展开的 n 阶泰勒公式。

下面就泰勒中值定理中函数展开点 $x_0\in(a,b)$ 的不同情况来证明不等式。

2　展开点 x_0 选取区间的中点情况

选区间中点展开是较常见的一种情况,然后在泰勒公式中取 x 为适当的值,通过两式相加,并对某些项进行放缩,便可将多余的项去掉而得所要的不等式。下面以实例说明。

例 1　设在区间 (a,b) 内,$f''(x)>0$,试证:对于 (a,b) 内的任意 2 个不同点 x_1 和 x_2,有

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)<\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}。$$

证明　将 $f(x)$ 在 $x_0=\dfrac{x_1+x_2}{2}$ 处展开,得

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(\xi)}{2!}(x-x_0)^2$$

其中 ξ 是 x_0 与 x 之间的某个值。

上式中分别取 $x=x_1$ 及 x_2,

$$f(x_1)=f(x_0)+f'(x_0)(x_1-x_0)+\frac{f''(\xi)}{2!}(x_1-x_0)^2,\xi\in(x_1,x_0),$$

$$f(x_2)=f(x_0)+f'(x_0)(x_2-x_0)+\frac{f''(\xi)}{2!}(x_2-x_0)^2,\xi\in(x_0,x_2),$$

上面两式相加,得

$$f(x_1)+f(x_2)=2f(x_0)+\frac{f''(\xi)}{2!}(x_1-x_0)^2+\frac{f''(\xi)}{2!}(x_2-x_0)^2,$$

因为 $f''(x)>0$,所以 $f(x_1)+f(x_2)>2f(x_0)$,

即

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)<\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}。$$

注:1) 若题中条件“$f''(x)>0$”改为“$f''(x)<0$”,而其余条件不变,则结论改为

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)>\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}。$$

2) 若例 1 的条件不变,则结论可推广如下:

对 (a,b) 内的任意 n 个不同点 $x_1,x_2,\cdots,x_n$,及 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n\in(0,1)$ 且 $\sum\limits_{i=1}^{n}\lambda_i=1$,有

$$f\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i x_i\right)<\sum_{i=1}^{n}\lambda_i f(x_i)。$$

例 2　设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上二阶连续可导,且 $f\left(\dfrac{a+b}{2}\right)=0$,证明

$$\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right| \leqslant \frac{M(b-a)^3}{24},\text{其中 } M=\max_{a\leqslant x\leqslant b}\left|f''(x)\right|。$$

证明　将 $f(x)$ 在 $x_0=\dfrac{a+b}{2}$ 处展开,得

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(\xi)}{2!}(x-x_0)^2$$

其中 ξ 是 x_0 与 x 之间的某个值。

因为 $f\left(\dfrac{a+b}{2}\right)=0$,所以有

$$f(x)=f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(\xi)}{2!}(x-x_0)^2,$$

上式在 $[a,b]$ 作定积分,然后取绝对值

$$\begin{aligned}\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right| &= \left|\int_a^b\left[f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(\xi)}{2!}(x-x_0)^2\right]\mathrm{d}x\right| \\ &= \frac{1}{2}\left|\int_a^b f''(\xi)(x-x_0)^2\mathrm{d}x\right| \leqslant \frac{M}{2}\int_a^b (x-x_0)^2\mathrm{d}x=\frac{M}{24}(b-a)^3,\end{aligned}$$

即

$$\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right| \leqslant \frac{M}{24}(b-a)^3。$$

3　展开点 x_0 选取区间端点的情况

当条件中出现 $f'(a)=f'(b)=0$,而欲证式中出现 $f(a)$,$f(b)$,$f''(\xi)$,展开点常选为区间两端点 a,b,然后在泰勒公式中取 x 为适当的值,消去多余的项,可得待证的不等式。

例 3　函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上二阶可导,且 $f'(a)+f'(b)=0$,证明:在 (a,b) 内至少存在一点 ξ,使得 $\left|f''(\xi)\right| \geqslant \dfrac{4\left|f(b)-f(a)\right|}{(b-a)^2}$。

证明　将 $f(x)$ 分别在 a 及 b 处展开,得

$$f(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(\xi_1)}{2!}(x-a)^2,\xi_1\in(a,x),$$

$$f(x)=f(b)+f'(b)(x-b)+\frac{f''(\xi_2)}{2!}(x-b)^2,\xi_2\in(x,b),$$

上面两式中取 $x=\dfrac{a+b}{2}$,

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right)=f(a)+f'(a)\cdot\frac{b-a}{2}+\frac{f''(\xi_1)}{2!}\left(\frac{b-a}{2}\right)^2,$$

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right)=f(b)-f'(b)\cdot\frac{b-a}{2}+\frac{f''(\xi_2)}{2!}\left(\frac{b-a}{2}\right)^2,$$

上面两式相减,并由 $f'(a)+f'(b)=0$,得

$$\left|f(b)-f(a)\right|=\frac{(b-a)^2}{8}\left|f''(\xi_1)-f''(\xi_2)\right| \leqslant \frac{(b-a)^2}{8}\left(\left|f''(\xi_1)\right|+\left|f''(\xi_2)\right|\right),$$

记 $\left|f''(\xi)\right|=\max\{\left|f''(\xi_1)\right|,\left|f''(\xi_2)\right|\}$,其中 $\xi=\xi_1$ 或 ξ_2。

于是有

$$\left|f(b)-f(a)\right| \leqslant \frac{(b-a)^2}{4}\left|f''(\xi)\right|,\text{即}\left|f''(\xi)\right| \geqslant \frac{4\left|f(b)-f(a)\right|}{(b-a)^2}。$$

4　展开点 x_0 选取函数的极值点或最值点的情况

当题中不等式出现函数的极值或最值项,展开点常选为该函数的极值点或最值点。

例 4　设函数 $f(x)$ 在区间 (a,b) 内二阶可导,且存在极值 $f(c)$ 及点 $p\in(a,b)$,使 $f(c)f(p)<0$,试证:至少存在一点 $\xi\in(a,b)$,使 $f(c)f''(\xi)<0$。

证明　将 $f(x)$ 在 $x_0=c$ 处展开,得

$$f(x)=f(c)+f'(c)(x-c)+\frac{f''(\xi)}{2!}(x-c)^2,\text{其中 }\xi\text{介于 }c\text{ 与 }x\text{ 之间。}$$

上式取 $x=p$,并由 $f'(c)=0$,得

$$f(p)=f(c)+\frac{f''(\xi)}{2!}(p-c)^2,\text{其中 }\xi\text{介于 }c\text{ 与 }p\text{ 之间},$$

两边同乘以 $f(c)$,得

$$f(p)f(c)=f^2(c)+\frac{f''(\xi)}{2!}f(c)(p-c)^2,$$

因为 $f(c)f(p)<0$,所以有　　$f(c)f''(\xi)<0$。

注:条件中有 $f(c)f(p)<0$,并隐含有 $f'(c)=0$,而欲证式出现 $f(c)f''(\xi)<0$,故选展开点为函数的极值点 c。

例 5　函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上有连续的二阶导数,且 $f(a)=f(b)=0$,证明

$$\max_{x\in[a,b]}|f''(x)|\geqslant\frac{8}{(b-a)^2}\max_{x\in[a,b]}|f(x)|。$$

证明　设 $|f(x_0)|=\max\limits_{x\in[a,b]}|f(x)|$,若 $f(x_0)=0$,则结论显然成立。

下设 $f(x_0)\neq0$,于是 $x_0\in(a,b)$,且有 $f'(x_0)=0$,

将 $f(x)$ 在 x_0 处展开,

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(\xi)}{2!}(x-x_0)^2,\text{其中 }\xi\text{介于 }x_0\text{ 与 }x\text{ 之间。}$$

即

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f''(\xi)}{2!}(x-x_0)^2,$$

于是有

$$f(x_0)=f(x)-\frac{f''(\xi)}{2!}(x-x_0)^2。$$

i)当 $x_0\in\left(a,\frac{a+b}{2}\right)$ 时,上式取 $x=a$,得

$$|f(x_0)|=\left|\frac{f''(\xi)}{2!}\right|(a-x_0)^2\leqslant\frac{(b-a)^2}{8}|f''(\xi)|,\xi\in(a,x_0),$$

即

$$|f''(\xi)|\geqslant\frac{8}{(b-a)^2}|f(x_0)|。$$

ii)当 $x_0\in\left(\frac{a+b}{2},b\right)$ 时,上式取 $x=b$,同理可得

$$|f''(\xi)|\geqslant\frac{8}{(b-a)^2}|f(x_0)|,\xi\in(x_0,b)。$$

由 i)及 ii)得,存在 $\xi\in(a,b)$,使得

$$|f''(\xi)|\geqslant\frac{8}{(b-a)^2}\max_{x\in[a,b]}|f(x)|,$$

再由 $f''(x)$ 的连续性,得

$$\max_{x\in[a,b]}|f''(x)|\geqslant\frac{8}{(b-a)^2}\max_{x\in[a,b]}|f(x)|。$$

注:1)当题中条件“连续”去掉,而其他条件不变时,结论可改为:在 (a,b) 内至少存在一点 ξ,使得 $|f''(\xi)|\geqslant\frac{8}{(b-a)^2}\max\limits_{x\in[a,b]}|f(x)|$ 成立。

2）当题中条件添加 $\max\limits_{x\in[a,b]}|f(x)|\neq 0$ 时，结论可改为：在 (a,b) 内至少存在一点 η，使得 $|f''(\eta)|\leqslant \dfrac{8}{(b-a)^2}\max\limits_{x\in[a,b]}|f(x)|$ 成立。

5 展开点 x_0 选取区间内任意点的情况

当题中结论考察 $f(x)$，$f'(x)$，$f''(x)$ 的关系时，展开点常选为该区间内的任意点，然后在泰勒公式中取 x 为适当的值，并对某些项作放缩处理，得所要的不等式。

例 6 函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上二阶可导，且 $|f(x)|\leqslant A$，$|f''(x)|\leqslant B$，其中 A，B 为非负常数，试证：

$$|f'(x)|\leqslant \frac{2A}{b-a}+\frac{B}{2}(b-a)，其中\ x\in(a,b)。$$

证明 将 $f(x)$ 在 $x_0\in(a,b)$ 处展开，

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(\xi)}{2!}(x-x_0)^2，其中\ \xi 介于\ x_0\ 与\ x\ 之间，$$

上式中分别取 $x=a$ 及 b

$$f(a)=f(x_0)+f'(x_0)(a-x_0)+\frac{f''(\xi_1)}{2!}(a-x_0)^2，\xi_1\in(a,x_0)，$$

$$f(b)=f(x_0)+f'(x_0)(b-x_0)+\frac{f''(\xi_2)}{2!}(b-x_0)^2，\xi_2\in(x_0,b)，$$

上面两式相减，得

$$f(b)-f(a)=f'(x_0)(b-a)+\frac{1}{2}[f''(\xi_2)(b-x_0)^2-f''(\xi_1)(a-x_0)^2]，$$

即
$$f'(x_0)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}-\frac{1}{2(b-a)}[f''(\xi_2)(b-x_0)^2-f''(\xi_1)(a-x_0)^2]，$$

故
$$\begin{aligned}|f'(x_0)|&\leqslant\frac{1}{b-a}(|f(b)|+|f(a)|)+\frac{1}{2(b-a)}[|f''(\xi_2)|(b-x_0)^2+|f''(\xi_1)|(a-x_0)^2]\\&\leqslant\frac{2A}{b-a}+\frac{B}{2(b-a)}[(b-x_0)^2+(x_0-a)^2]\\&\leqslant\frac{2A}{b-a}+\frac{B}{2}(b-a)，\end{aligned}$$

即
$$|f'(x_0)|\leqslant\frac{2A}{b-a}+\frac{B}{2}(b-a)，再由\ x_0\ 的任意性，$$

故有
$$|f'(x)|\leqslant\frac{2A}{b-a}+\frac{B}{2}(b-a)，其中\ x\in(a,b)。$$

例 7[6] 函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上二阶可导，且 $f(a)=f(b)=0$，$M=\max\limits_{x\in[a,b]}|f''(x)|$，试证

$$\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right|\leqslant\frac{M(b-a)^3}{12}。$$

证明 将 $f(x)$ 在 $t\in[a,b]$ 处展开，

$$f(x)=f(t)+f'(t)(x-t)+\frac{f''(\xi)}{2!}(x-t)^2，其中\ \xi 介于\ t\ 与\ x\ 之间。$$

上式中分别取 $x=a$ 及 b

$$f(a)=f(t)+f'(t)(a-t)+\frac{f''(\xi_1)}{2!}(a-t)^2，\xi_1\in(a,t)，$$

$$f(b)=f(t)+f'(t)(b-t)+\frac{f''(\xi_2)}{2!}(b-t)^2，\xi_2\in(t,b)，$$

上面两式相加,得

$$f(t)=-\frac{1}{2}f'(t)(a+b-2t)-\frac{1}{4}\left[f''(\xi_1)(a-t)^2+f''(\xi_2)(b-t)^2\right],$$

上式两端在$[a,b]$上对 t 作积分,

$$\begin{aligned}\int_a^b f(t)\mathrm{d}t&=-\frac{1}{2}\int_a^b f'(t)(a+b-2t)\mathrm{d}t-\frac{1}{4}\int_a^b\left[f''(\xi_1)(a-t)^2+f''(\xi_2)(b-t)^2\right]\mathrm{d}t\\&=-\int_a^b f(t)\mathrm{d}t-\frac{1}{4}\int_a^b\left[f''(\xi_1)(a-t)^2+f''(\xi_2)(b-t)^2\right]\mathrm{d}t,\end{aligned}$$

于是有

$$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t=-\frac{1}{8}\int_a^b\left[f''(\xi_1)(a-t)^2+f''(\xi_2)(b-t)^2\right]\mathrm{d}t,$$

也有

$$\begin{aligned}\left|\int_a^b f(t)\mathrm{d}t\right|&\leqslant\frac{1}{8}\left(\left|\int_a^b\left[f''(\xi_1)(a-t)^2\mathrm{d}t\right|+\left|\int_a^b f''(\xi_2)(b-t)^2\right]\mathrm{d}t\right|\right)\\&\leqslant\frac{M}{8}\left(\left|\int_a^b(a-t)^2\mathrm{d}t\right|+\left|\int_a^b(b-t)^2\mathrm{d}t\right|\right)=\frac{M(b-a)^3}{12},\end{aligned}$$

即

$$\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right|\leqslant\frac{M(b-a)^3}{12}。$$

6　结　语

通过对上述各范例分析,可以看到泰勒公式中展开点 x_0 的选取要根据题中的条件和结论的形式而定,只要认真体会,这种方法还是可以掌握的。同时可以看到,泰勒中值定理在证明某些含抽象函数不等式中的优势是其他方法不能替代的。

参考文献:

[1] 严谨,张继昌.研究生入学考试精编[M].杭州:浙江大学出版社,1999:79-81.
[2] 裴礼义.数学分析中的典型问题与方法[M].北京:高等教育出版社,2006:245.
[3] 陈传章,金福临,朱学炎,等.数学分析(上册)[M].北京:高等教育出版社,1990:194-196.
[4] 陈文灯,黄先开,曹显兵.数学题型集粹与练习题集[M].北京:世界图书出版公司北京公司,2005:91-92.
[5] 同济大学数学教研室.高等数学(上册)[M].北京:高等教育出版社,2007:139-140.
[6] 刘法贵,左卫兵.证明积分不等式的几种方法[J].高等数学研究,2008,11(1):121-124.