浙江科技学院学报,第 23 卷第 1 期,2011 年 2 月
Journal of Zhejiang University of Science and Technology
Vol. 23 No. 1, Feb. 2011

DOI: 10.3969/j.issn.1671-8798.2011.01.002

# 非平稳 LNQD 序列部分和的精确渐近性

沈建伟
(浙江科技学院 理学院,杭州 310023)

**摘　要:** 设$\{X_n,n\geqslant 1\}$为零均值,方差有限的非平稳 LNQD 随机变量序列,利用最大协方差系数 $u(n)=\sup\limits_{k\in N}\sum\limits_{j:|j-k|\geqslant n}|\mathrm{Cov}(X_j,X_k)|\to 0(n\to\infty)$解除了序列是平稳的条件限制,推广了已有的一些随机变量序列部分和的精确渐近性结果。

**关键词:** LNQD 列;精确渐近性;非平稳;部分和
**中图分类号:** O211.4　　**文献标志码:** A　　**文章编号:** 1671-8798(2011)01-0006-04

# Precise asymptotics for partial sums of nonstationary LNQD sequences

SHEN Jian-wei
(School of Science, Zhejiang University of Science and Technology, Hangzhou 310023, China)

**Abstract:** Let $\{X_n,n\geqslant 1\}$ be a sequence of nonstationary LNQD random variables with mean zeros and finite variances, we remove the stationary restriction of sequence under the condition of maximal covariance coefficient $u(n)=\sup\limits_{k\in N}\sum\limits_{j:|j-k|\geqslant n}|\mathrm{Cov}(X_j,X_k)|\to 0(n\to\infty)$. In addition, the results of precise asymptotics for partial sums of nonstationary LNQD sequences include some known theorems as special cases.

**Key words:** LNQD sequences; precise asymptotics; nonstationary; partial sums

## 1　引言及引理

设$\{X_n,n\geqslant 1\}$是一随机变量序列,$S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}X_k,n\geqslant 1$。设$\varphi(x)$和$f(x)$均为$[1,+\infty)$上的正值函数。引起人们较大兴趣的研究方向是:当$\varepsilon\searrow 0$时,形如$\sum_{n\geqslant 1}\varphi(n)P\{|S_n|\geqslant\varepsilon f(n)\}$,$\forall\varepsilon>0$的级数的收敛条件及其收敛速度。Heyde[1] 首先对此进行了研究,他给出当$EX=0,EX^2<\infty$时$\lim\limits_{\varepsilon\searrow 0}\varepsilon^2\sum_{n\geqslant 1}P\{|S_n|\geqslant\varepsilon n\}=EX^2$。该方向的研究被称为精确渐近性,许多学者对此作了大量深入的研究。Gut 和 Spătaru 等在这方面作

**收稿日期:** 2010-05-14
**作者简介:** 沈建伟(1972—　),男,浙江萧山人,讲师,硕士,主要从事基础数学的教学和概率极限理论的研究。

出了许多贡献[2-4]。Gut 和 Spătaru[2] 给出了独立随机变量列的精确渐近性，Mi[5] 给出了 PA 列的精确渐近性，Tan[6] 给出了 PA 列生成线性过程的精确渐近性，赵月旭等[7] 给出了强平稳 $\rho^-$ 混合序列的精确渐近性。上述文献给出的相依随机变量序列的精确渐近性的研究结果都带有平稳条件的限制，而许多实际问题中所出现的随机变量序列却大多都为非平稳的，所以解除平稳条件的束缚具有一定的理论与实际的意义。赵月旭[8] 给出了非平稳 NA 序列部分和精确渐近性的一些结果。

由于 LNQD 序列比 NA 序列更弱，故本文给出的非平稳 LNQD 序列部分和精确渐近性的一些结果具有一定的意义。

**定义 1.1**[9]　称随机变量 $X$ 和 $Y$ 是 NQD (negatively quadrant dependent) 的，若对 $\forall x, y \in R$ 都有

$$P(X < x, Y < y) \leqslant P(X < x)P(Y < y)。$$

称随机变量列 $\{X_n, n \geqslant 1\}$ 是两两 NQD 的，若对 $\forall i \neq j$，$X_i$ 与 $X_j$ 是 NQD 的。

称随机变量列 $\{X_n, n \geqslant 1\}$ 是 LNQD 的，若对任意不交子集 $A, B \subset N$ 及正实数 $r_i$，有 $\sum\limits_{i\in A} r_i X_i$ 和 $\sum\limits_{j \in B} r_j X_j$ 是 NQD 的。

本文以下内容在未作特殊说明的情况下，总是令 $\{X_n, n \geqslant 1\}$ 是 LNQD 随机变量列，且 $EX_k = 0$，$EX_k^2 < \infty, k \in N$；$S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} X_k$，$\sigma_n^2 = ES_n^2$；$u(n) = \sup\limits_{k \in N} \sum\limits_{j:|j-k| \geqslant n} |\operatorname{Cov}(X_j, X_k)|, n \in N^*$；记 $\log x = \ln(x \vee e)$，总设 $C$ 代表正常数，在不同的地方可以代表不同的值。为行文方便，总是用"$\ll$"代表通常意义下的"O"。

**引理 1.1**[10]　令 $\{X_n, n \geqslant 1\}$ 是 LNQD 随机变量列，且 $EX_k = 0, EX_k^2 < \infty, k \in N$。若

1) $\lim\limits_{n\to\infty} u(n) = 0, u(1) < \infty$；

2) $\liminf\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sigma_n^2}{n} > 0$；

3) $\sup\limits_k E|X_k|^r < \infty$，对某些 $r > 2$，则 $\dfrac{S_n}{\sigma_n} \xrightarrow{d} N(0,1), n \to \infty$。

**引理 1.2**　令 $\{X_n, n \geqslant 1\}$ 是一个均值为零的 LNQD 随机变量列，$E|X_i|^t < \infty$，对某些 $t \geqslant 2$ 及任意 $i \geqslant 1$，则存在与 $n$ 无关的正常数 $B$ 和 $C$，使得

$$E\left|\sum_{k=1}^{n} X_k\right|^t = E|S_n|^t \leqslant B n^{t/2} \max_{1 \leqslant k \leqslant n} E|X_k|^t \leqslant C n^{t/2}。$$

**证明**　见文献[10]中定理 3.1。

## 2　主要结果

**定理 2.1**　设 $\{X_n, n \geqslant 1\}$ 为非平稳的 LNQD 随机变量序列，且 $EX_k = 0, EX_k^2 < \infty, k \in N$。且满足以下条件：

1) $\lim\limits_{n\to\infty} u(n) = 0, u(1) < \infty$；

2) 存在 $\sigma > 0$，有 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sigma_n^2}{n} = \sigma^2$；

3) $\sup\limits_k E|X_k|^{2+\delta'} < \infty$，对某一 $\delta' > 0$；

假设正值函数 $g(x)$ 是 $[1, +\infty)$ 上具有一阶非负导数 $g'(x)$ 的可导函数，满足以下条件：

A.1　$g(x) \uparrow +\infty, x \to \infty$；

A.2　$g'(x)$ 在 $[1, +\infty)$ 上单调非降或单调不增；

A.3　若 $g'(x)$ 单调非降，$\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{g'(x+1)}{g'(x)} = 1$。

又设

B.1　$h(x) = \dfrac{g'(x)}{g(x)}$ 在 $[1, +\infty)$ 上单调非降或单调不增；

B.2 若 $h(x)$ 单调非降，$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{h(x+1)}{h(x)}=1$，

则对 $\forall s>\dfrac{1}{2+\delta'}$，有 $\lim\limits_{\varepsilon\searrow 0}\varepsilon^{\frac{1}{s}}\sum_{n\geqslant 1}g'(n)P\{|S_n|\geqslant\varepsilon\sqrt{n}g^s(n)\}=E|Z|^{\frac{1}{s}}$， (1)

对 $\forall s>0$，有 $\lim\limits_{\varepsilon\searrow 0}\dfrac{1}{-\log\varepsilon}\sum_{n\geqslant 1}h(n)P\{|S_n|\geqslant\varepsilon\sqrt{n}g^s(n)\}=\dfrac{1}{s}$， (2)

其中随机变量 $Z$ 服从均值为 0，方差为 $\sigma^2$ 的正态分布。

**注**：在式(1) 中，令 $g(x)=x^{\frac{r}{p}-1}$，$s=\dfrac{2-p}{2(r-p)}$，则对 $\forall 0<p<r<2$，有

$$\lim_{\varepsilon\searrow 0}\varepsilon^{\frac{2(r-p)}{2-p}}\sum_{n\geqslant 1}n^{\frac{r}{p}-2}P(|S_n|\geqslant\varepsilon n^{\frac{1}{p}})=\frac{p}{r-p}E|Z|^{\frac{2(r-p)}{2-p}}。$$

在式(2) 中，令 $g(x)=x$，$s=\dfrac{2-p}{2p}$，则对 $\forall 0<p<2$，有

$$\lim_{\varepsilon\searrow 0}\frac{1}{-\log\varepsilon}\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n}P(|S_n|\geqslant\varepsilon n^{\frac{1}{p}})=\frac{2p}{2-p}。$$

在式(1) 中令 $g(x)=(\log x)^{\delta+1}$，$s=\dfrac{1}{2(\delta+1)}$，则对 $\forall\delta>-1,\delta<\dfrac{\delta'}{2}$，有

$$\lim_{\varepsilon\searrow 0}\varepsilon^{2\delta+2}\sum_{n\geqslant 1}\frac{(\log n)^{\delta}}{n}P(|S_n|\geqslant\varepsilon\sqrt{n\log n})=\frac{E|Z|^{(2\delta+2)}}{\delta+1},$$

得到了非平稳 LNQD 序列的 Baum-Katz 和 Davis 大数律的精确渐近性。

## 3 定理的证明

先证明式(1)，其证明可由以下 4 个命题得证。不失一般性，令 $\sigma=1$。

**命题 3.1** 对 $\forall s>0$，有

$$\lim_{\varepsilon\searrow 0}\varepsilon^{\frac{1}{s}}\sum_{n\geqslant 1}g'(n)P\{|Z|\geqslant\varepsilon g^s(n)\}=E|Z|^{\frac{1}{s}},$$

其中，随机变量 $Z$ 服从均值为 0，方差为 1 的正态分布。

**证明** 见文献[6] 中命题 3.1。

在以下命题中，定义 $b(\varepsilon)=g^{-1}(M\varepsilon^{-\frac{1}{s}})$，$M\geqslant 1$，$g^{-1}(x)$ 表示是 $g(x)$ 的反函数。

**命题 3.2** 对 $\forall M\geqslant 1$，有

$$\lim_{\varepsilon\searrow 0}\varepsilon^{\frac{1}{s}}\sum_{n\leqslant b(\varepsilon)}g'(n)\,|\,P\{|S_n|\geqslant\varepsilon\sqrt{n}g^s(n))-P\{|Z|\geqslant\varepsilon g^s(n)\}\,|=0。$$

**证明** 定义 $\Delta_n=\sup\limits_x|P\{|S_n|\geqslant\sqrt{n}x\}-P\{|Z|\geqslant x\}|$，由**引理 1.1** 可知

$$S_n/\sqrt{n}\xrightarrow{d}N(0,1)，\text{则 }\Delta_n\to 0,n\to\infty。$$

$$\text{注意到}\sum_{n\leqslant b(\varepsilon)}g'(n)\ll\int_1^{b(\varepsilon)}g'(x)\mathrm{d}x\ll g(b(\varepsilon))=M\varepsilon^{-\frac{1}{s}}$$

利用 Toeplitz 引理，

$$\lim_{\varepsilon\searrow 0}\varepsilon^{\frac{1}{s}}\sum_{n\leqslant b(\varepsilon)}g'(n)\,|\,P\{|S_n|\geqslant\varepsilon\sqrt{n}g^s(n))-P\{|Z|\geqslant\varepsilon g^s(n)\}\,|\leqslant\lim_{\varepsilon\searrow 0}\varepsilon^{\frac{1}{s}}\sum_{n\leqslant b(\varepsilon)}g'(n)\Delta_n=0。$$

**命题 3.3** 对 $\forall s>0$ 及 $M\geqslant 1$，关于 $0<\varepsilon<1$ 一致地有

$$\lim_{M\to\infty}\varepsilon^{\frac{1}{s}}\sum_{n>b(\varepsilon)}g'(n)P\{|Z|\geqslant\varepsilon g^s(n)\}=0。$$

**证明** 见文献[6] 中命题 3.3。

**命题 3.4** 对 $\forall s>\dfrac{1}{2+\delta'}$ 及 $M\geqslant 1$，关于 $0<\varepsilon<1$ 一致地有

$$\lim_{M\to\infty}\varepsilon^{\frac{1}{s}}\sum_{n>b(\varepsilon)}g'(n)P\{|S_n|\geqslant\varepsilon\sqrt{n}g^s(n)\}=0。$$

**证明** 由**定理 2.1** 的条件利用**引理 1.2** 可知，对 $\forall s>\dfrac{1}{2+\delta'}$，存在 $t\in\left(\dfrac{1}{s},2+\delta'\right)$ 及不依赖于 $n$ 的

正常数 $C$，使得对任意 $n \geqslant 1$，有

$$E\mid S_n\mid^t \leqslant Cn^{t/2}。$$

因此，利用(A.2)，(A.3) 式，Markov 不等式有

$$\begin{aligned}
&\lim_{M\to\infty}\varepsilon^{\frac{1}{s}}\sum\nolimits_{n>b(\varepsilon)}g'(n)P\{\mid S_n\mid\geqslant\varepsilon\sqrt{n}g^s(n)\}\leqslant\\
&\quad\lim_{M\to\infty}\varepsilon^{\frac{1}{s}}\sum\nolimits_{n>b(\varepsilon)}g'(n)E\mid S_n\mid^t(\varepsilon\sqrt{n}g^s(n))^{-t}\leqslant\\
&\quad\lim_{M\to\infty}\varepsilon^{\frac{1}{s}}\sum\nolimits_{n>b(\varepsilon)}g'(n)(\varepsilon\sqrt{n}g^s(n))^{-t}Cn^{t/2}\leqslant\\
&\quad C\lim_{M\to\infty}\varepsilon^{\frac{1}{s}-t}\sum\nolimits_{n>b(\varepsilon)}g'(n)(g(n))^{-st}\leqslant\\
&\quad C\lim_{M\to\infty}\varepsilon^{\frac{1}{s}-t}\int_{b(\varepsilon)}^{\infty}g'(x)(g(x))^{-st}\mathrm{d}x=C\lim_{M\to\infty}M^{1-st}=0。
\end{aligned}$$

因此**命题 3.4** 成立。

结合上面 4 个命题，式(1) 得证。

再来证明式(2)，其证明可由以下 4 个命题得证。

**命题 3.5**　对 $\forall s>0$，有

$$\lim_{\varepsilon\searrow 0}\frac{1}{-\log\varepsilon}\sum\nolimits_{n\geqslant 1}h(n)P\{\mid Z\mid\geqslant\varepsilon g^s(n)\}=\frac{1}{s}。$$

**证明**　见文献[6] 中命题 4.1。

以下命题中，定义 $a(\varepsilon)=g^{-1}(\varepsilon^{-r})$，此处 $r>\frac{1}{s}>0$，$g^{-1}(x)$ 表示是 $g(x)$ 的反函数。

**命题 3.6**　对 $\forall s>0$，有

$$\lim_{\varepsilon\searrow 0}\frac{1}{-\log\varepsilon}\sum\nolimits_{n\leqslant a(\varepsilon)}h(n)\mid P\{\mid S_n\mid\geqslant\varepsilon\sqrt{n}g^s(n)\}-P\{\mid Z\mid\geqslant\varepsilon g^s(n)\}\mid=0。$$

**证明**　类似于命题 3.2。

**命题 3.7**　对 $\forall s>0$，有

$$\lim_{\varepsilon\searrow 0}\frac{1}{-\log\varepsilon}\sum\nolimits_{n>a(\varepsilon)}h(n)P\{\mid Z\mid\geqslant\varepsilon g^s(n)\}=0。$$

**证明**　见文献[6] 中命题 4.3。

**命题 3.8**　对 $\forall s>0$，有

$$\lim_{\varepsilon\searrow 0}\frac{1}{-\log\varepsilon}\sum\nolimits_{n>a(\varepsilon)}h(n)P\{\mid S_n\mid\geqslant\varepsilon\sqrt{n}g^s(n)\}=0。$$

**证明**　类似于**命题 3.4**，取 $t\in(2,2+\delta')$，利用(B.1)，(B.2) 式及**引理 1.2**，有

$$\begin{aligned}
&\lim_{\varepsilon\searrow 0}\frac{1}{-\log\varepsilon}\sum\nolimits_{n>a(\varepsilon)}h(n)P\{\mid S_n\mid\geqslant\varepsilon\sqrt{n}g^s(n)\}\leqslant\\
&\quad\lim_{\varepsilon\searrow 0}\frac{1}{-\log\varepsilon}\sum\nolimits_{n>a(\varepsilon)}h(n)E\mid S_n\mid^t(\varepsilon\sqrt{n}g^s(n))^{-t}\leqslant\\
&\quad\lim_{\varepsilon\searrow 0}\frac{1}{-\log\varepsilon}\sum\nolimits_{n>a(\varepsilon)}h(n)(\varepsilon\sqrt{n}g^s(n))^{-t}Cn^{t/2}=\\
&\quad C\lim_{\varepsilon\searrow 0}\frac{\varepsilon^{-t}}{-\log\varepsilon}\sum\nolimits_{n>a(\varepsilon)}\frac{g'(n)}{g(n)}(g(n))^{-st}\leqslant\\
&\quad C\lim_{\varepsilon\searrow 0}\frac{\varepsilon^{-t}}{-\log\varepsilon}\int_{a(\varepsilon)}^{\infty}\frac{g'(x)}{g(x)}(g(x))^{-st}\mathrm{d}x=C\lim_{\varepsilon\searrow 0}\frac{\varepsilon^{(rs-1)t}}{-\log\varepsilon}=0。
\end{aligned}$$

**命题 3.8** 成立。

结合上面 4 个命题，式(2) 得证。

故**定理 2.1** 得证。

（下转第 14 页）