浙江科技学院学报,第 23 卷第 4 期,2011 年 8 月
Journal of Zhejiang University of Science and Technology
Vol. 23 No. 4, Aug. 2011

DOI: 10.3969/j. issn. 1671-8798. 2011. 04. 001

一类带粗糙核的多线性奇异积分交换子的 CBMO 估计

张慧慧[1],陶祥兴[2]

(1. 宁波大学 理学院,浙江 宁波 315211;2. 浙江科技学院 理学院,杭州 310023)

摘　要:讨论了具有粗糙核的多线性奇异积分算子交换子 $T^m_{\Omega,\vec{b}}(f)(x)$ 的 CBMO 估计,其中核函数 $\Omega\in L^s(S^{n-1})$ $(1<s<\infty)$ 并且不具有任何光滑性,$\vec{b}=(b_1,\cdots,b_m)$,$b_i\in \mathrm{CBMO}^{s_i,\mu_i}$。证明了此类多线性算子交换子是从 λ-中心 Morrey 空间 $B^{p,\lambda}$ 到 ν-中心 Morrey 空间 $B^{q,\nu}$ 有界的,其中 $\lambda=\sum\limits_{i=1}^m\mu_i+\nu<0$,$1/q=\sum\limits_{i=1}^m 1/s_i+1/p<1$。

关键词:Calderón-Zygmund 算子;交换子;λ-中心 Morrey 空间;λ-中心 BMO 空间

中图分类号:O174.3　　　**文献标志码**:A　　　**文章编号**:1671-8798(2011)04-0257-05

CBMO estimate for a class of multilinear commutators of singular integrals with rough kernels

ZHANG Hui-hui[1], TAO Xiang-xing[2]

(1. Faculty of Science, Ningbo University, Ningbo 315211, China; 2. School of Sciences, Zhejiang University of Science and Technology, Hangzhou 310023, China)

Abstract: The CBMO estimate of commutators of multilinear singular integrals $T^m_{\Omega,\vec{b}}(f)(x)$ with rough kernels is discussed, where $\vec{b}=(b_1,\cdots,b_m)$, $b_i\in \mathrm{CBMO}^{s_i,\mu_i}$, and the kernel Ω belongs to the space $L^s(S^{n-1})$ $(1<s<\infty)$ without any smoothness. The Authors prove that this kind of multilinear commutator is bounded from λ-Central Morrey space $B^{p,\lambda}$ to ν-central Morrrey space $B^{q,\nu}$, where $\lambda=\sum\limits_{i=1}^m\mu_i+\nu<0$ and $1/q=\sum\limits_{i=1}^m 1/s_i+1/p<1$.

Key words: Calderón-Zygmund operator; commutator; λ-central Morrey space; λ-central BMO space

---

收稿日期:2011-01-04

基金项目:国家自然科学基金资助项目(10771110);宁波市自然科学基金项目(2009A610084);浙江科技学院科研启动基金项目(F501107905)

作者简介:张慧慧(1985—　),女,河南省沈丘人,硕士研究生,研究方向为调和分析。

通讯作者:陶祥兴,教授,主要从事调和分析与偏微分方程研究。

1 引言及主要结果

设 S^{n-1} 为 R^n 上面的单位球面，带有通常的 Lebesgue 测度 $\mathrm{d}\sigma = \mathrm{d}\sigma(x')$，并且满足如下消失性，

$$\int_{S^{n-1}} \Omega(x')\mathrm{d}\sigma(x') = 0 \tag{1}$$

则具有粗糙核的奇异积分算子定义为

$$T_\Omega(f)(x) = \mathrm{p.v.}\int_{R^n} \frac{\Omega(x-y)}{|x-y|^n} f(y)\mathrm{d}y,$$

其中 $\Omega \in L^s(S^{n-1})$，$(1 \leqslant s < \infty)$，核函数 Ω 满足零次齐次性并且在单位球面上具有如式(1)形式的消失性。

对于上述算子 T_Ω，文献[1-2]对其进行了深入的研究。在此基础上，对每一个属于有界平均振荡空间的函数 $b(x)$，奇异积分交换子 $T_b(f)(x)$ 的定义如下：

$$T_b(f)(x) = b(x)T_\Omega(f)(x) - T_\Omega(bf)(x)。$$

对于上述算子，Coifman 等人于文献[3]中给出了一个经典的结论，即 $T_b(f)(x)$ 为 $L^p(1<p<\infty)$ 有界的充要条件为 $b \in \mathrm{BMO}$，其中 BMO 为有界平均振荡空间。

1999 年，Lu 等人在文献[4]中定义了如下的中心有界平均振荡空间 CBMO_q，

$$\| f \|_{\mathrm{CBMO}_q} = \sup_{R>0}\left(\frac{1}{|B(0,R)|}\int_{B(0,R)} | f(x) - f_{B(0,R)} |^q \mathrm{d}x\right)^{1/q} < \infty。$$

注意到 $\mathrm{BMO} \subset \mathrm{CBMO}_q$，因此当 $b \in \mathrm{CBMO}_q$ 时，算子 $T_b(f)(x)$ 的 $L^p(1<p<\infty)$ 有界性将不一定成立。

最近，Alvarez 等人在文献[5]中定义了如下的 λ-中心有界平均振荡空间 $\mathrm{CBMO}^{q,\lambda}(R^n)$ 及 λ-中心 Morrey 空间 $B^{q,\lambda}(R^n)$。

定义 1[5] 给定 $\lambda < 1/n$，$1 < q < \infty$，λ-中心有界平均振荡空间 $\mathrm{CBMO}^{q,\lambda}(R^n)$ 定义为

$$\mathrm{CBMO}^{q,\lambda}(R^n) = \{ f \in L^q_{\mathrm{loc}}(R^n) : \| f \|_{\mathrm{CBMO}^{q,\lambda}} < \infty \},$$

其中 $\| f \|_{\mathrm{CBMO}^{q,\lambda}}$ 范数定义为

$$\| f \|_{\mathrm{CBMO}^{q,\lambda}} = \sup_{R>0}\left(\frac{1}{|B(0,R)|^{1+q\lambda}}\int_{B(0,R)} |f(x) - |f|_{B(0,R)}|^q \mathrm{d}x\right)^{1/q}。$$

定义 2[5] 令 $\lambda \in R$，$1 < q < \infty$，则 λ-中心 Morrey 空间 $B^{q,\lambda}(R^n)$ 定义为

$$B^{q,\lambda}(R^n) = \{ f \in L^q_{\mathrm{loc}}(R^n) : \| f \|_{B^{q,\lambda}} < \infty \},$$

其中 $\| f \|_{B^{q,\lambda}(R^n)}$ 范数定义为

$$\| f \|_{B^{q,\lambda}(R^n)} = \sup_{R>0}\left(\frac{1}{|B(0,R)|^{1+q\lambda}}\int_{B(0,R)} |f(x)|^q \mathrm{d}x\right)^{1/q}。$$

Alvarez 等人证明了当 $b \in \mathrm{CBMO}^{q,\lambda}$ 时，算子 $T_b(f)(x)$ 在 λ-中心 Morrey 空间 $B^{q,\lambda}(R^n)$ 是有界的，其中核函数 $\Omega(x)$ 为有界函数。

对于核函数 $\Omega \in L^s(S^{n-1})$ 的情形，2008 年，Fu 等人在文献[6]中证明了如果 $b \in \mathrm{CBMO}^{q,\lambda}$，则相应的交换子 $T_b(f)(x)$ 也是在 λ-中心 Morrey 空间 $B^{q,\lambda}(R^n)$ 有界的。

同时，2002 年，Perez 等人在文献[7]中考虑了如下形式的多线性奇异积分算子交换子，

$$T^m_{\vec{b}}(f)(x) = \int_{R^n} K(x,y)\left[\prod_{j=1}^m b_j(x) - b_j(y)\right] f(y)\mathrm{d}y,$$

其中 $\vec{b} = (b_1, b_2, \cdots, b_m)$ 且核函数 $K(x,y)$ 满足经典核的条件，具体参见文献[8]。Perez 等人证明了当 $\vec{b} \in \overrightarrow{\mathrm{BMO}}$ 时，算子 $T^m_{\vec{b}}(f)(x)$ 在 L^p 空间是加权有界的。

最近，Tao 等人在文献[9]中证明了上述算子 $T^m_{\vec{b}}(f)(x)$ 在 λ-中心 Morrey 空间 $B^{q,\lambda}(R^n)$ 的有界性，其中 $b_i \in \mathrm{CBMO}^{q_i,\lambda_i}$。

受上述工作启发，本文定义了一类带粗糙核的多线性奇异积分交换子。并在此基础上研究其在 λ-中心 Morrey 空间上的有界性问题，得到了其在 λ-中心 Morrey 空间中的 CBMO 估计。

定义 3　令 $\vec{b}=(b_1,b_2,\cdots,b_m)$,$b_i\in \mathrm{CBMO}^{s_i,\mu_i}(R^n)$,$i=1,2,\cdots,m$,则带粗糙核的多线性奇异积分交换子定义为

$$T^m_{\Omega,\vec{b}}(f)(x)=\int_{R^n}\frac{\Omega(x-y)}{|x-y|^n}\Big[\prod_{j=1}^m b_j(x)-b_j(y)\Big]f(y)\mathrm{d}y。$$

本文的主要定理:

定理 1　令 $T^m_{\Omega,\vec{b}}(f)(x)$ 为如上具有粗糙核的多线性奇异积分算子交换子,其中核函数 $\Omega\in L^s(S^{n-1})$,$(1<s<\infty)$ 且在单位球面上满足一阶消失性,$\vec{b}=(b_1,b_2,\cdots,b_m)$,$b_i\in \mathrm{CBMO}^{s_i,\mu_i}(R^n)$,$0<\mu_i<1/n$,$1<s_i<\infty$,$i=1,2,\cdots,m$。如果 $1<p<\infty$,$1/q=\sum\limits_{i=1}^m 1/s_i+1/p<1$,$\nu\in R$,$\lambda=\sum\limits_{i=1}^m\mu_i+\nu<0$,且上述指标满足 $\sum\limits_{i=1}^m 1/s_i+1/s<1/p'$,$\sum\limits_{i=1}^m\mu_i+\nu<0$,则对任意 $f\in B^{p,\nu}$,则有

$$\|T^m_{\Omega,\vec{b}}(f)\|_{B^{q,\lambda}}\leqslant C\prod_{i=1}^m\|b_i\|_{\mathrm{CBMO}^{s_i,\mu_i}}\|f\|_{B^{p,\nu}}。$$

2　定理 1 的证明

在证明定理 1 之前,需要如下的引理。

引理 1[1]　设 $T_\Omega(f)(x)$ 为前所述的具有粗糙核的奇异积分,若 $1<q<\infty$,$\Omega\in L^s(S^{n-1})$,$(1<s<\infty)$,且在单位球面上满足式(1),则有 $\|T_\Omega(f)\|_{L^q(R^n)}\leqslant C\|f\|_{L^q(R^n)}$。

定理 1 的证明　不失一般性,这里仅仅证明 $m=2$ 的情况,$m>2$ 的情况完全类似。

固定一个常数 $R>0$,定义 $B=B(0,R)$ 及 kB 为 $B(0,kR)(k\in Z)$。对 $\forall x\in B$,接下来可以对 $T^2_{\Omega,\vec{b}}(f)(x)$ 作如下的分解,

$$\begin{aligned}T^2_{\Omega,\vec{b}}(f)(x)=&\Big[b_1(x)-|b_1|_B\Big]\Big[b_2(x)-|b_2|_B\Big]T_\Omega(f)(x)-\Big[b_1(x)-|b_1|_B\Big]T_\Omega((b_2(x)-\\&|b_2|_B)(f))(x)-\Big[b_2(x)-|b_2|_B\Big]T_\Omega((b_1(x)-|b_1|_B)(f))(x)+T_\Omega((b_1(x)-\\&|b_1|_B)(b_2(x)-|b_2|_B)(f))(x),\end{aligned}$$

其中 $|b_1|_B$,$|b_2|_B$ 分别为 $b_1(x)$,$b_2(x)$ 在 B 上的积分平均。

$$\begin{aligned}\text{则有}\Big(\int_B|T^2_{\Omega,\vec{b}}(f)(x)|^q\mathrm{d}x\Big)^{1/q}\leqslant\ &C\Big(\int_B|[b_1(x)-|b_1|_B][b_2(x)-|b_2|_B]T_\Omega(f)(x)|^q\mathrm{d}x\Big)^{1/q}+\\&C\Big(\int_B\Big|\Big[b_1(x)-|b_1|_B\Big]T_\Omega((b_2(x)-|b_2|_B)(f))(x)\Big|^q\mathrm{d}x\Big)^{1/q}+\\&C\Big(\int_B\Big|\Big[b_2(x)-|b_2|_B\Big]T_\Omega((b_1(x)-|b_1|_B)(f))(x)\Big|^q\mathrm{d}x\Big)^{1/q}+\\&C\Big(\int_B|T_\Omega((b_1(x)-|b_1|_B)(b_2(x)-|b_2|_B)(f))(x)|^q\mathrm{d}x\Big)^{1/q}=:\\&C(J_1+J_2+J_3+J_4)。\end{aligned}$$

记 $f=f\chi_{2B}+f\chi_{(2B)^c}=:f_1+f_2$,其中 χ_{2B} 为 $2B$ 上面的特征函数。下面分别估计 J_1,J_2,J_3,J_4。

1) J_1 部分

首先注意到

$$\begin{aligned}J_1\leqslant&\Big(\int_B|[b_1(x)-|b_1|_B][b_2(x)-|b_2|_B]T_\Omega(f_1)(x)|^q\mathrm{d}x\Big)^{1/q}+\\&\Big(\int_B|[b_1(x)-|b_1|_B][b_2(x)-|b_2|_B]T_\Omega(f_2)(x)|^q\mathrm{d}x\Big)^{1/q}=J_{11}+J_{12}。\end{aligned}$$

对于 J_{11},根据 $1/q=\sum\limits_{i=1}^m 1/s_i+1/p$,由 Hölder 不等式和 T_Ω 的 $L^p(p>1)$ 有界性可得

$$J_{11} \leqslant C\prod_{i=1}^{2}\left(\int_B (b_i(x)-|b_i|_B)^{s_i}\,\mathrm{d}x\right)^{1/s_i}\left(\int_B |T_\Omega f_1(x)|^p\,\mathrm{d}x\right)^{1/p} \leqslant C\prod_{i=1}^{2}\left(\int_B (b_i(x)-|b_i|_B)^{s_i}\,\mathrm{d}x\right)^{1/s_i}\left(\int_{2B}|f(x)|^p\,\mathrm{d}x\right)^{1/p} \leqslant C\,|B|^{1/p+\nu+1/s_1+\mu_1+1/s_2+\mu_2}\prod_{i=1}^{2}\|b_i\|_{CBMO^{s_i\mu_i}}\|f\|_{B^{p,\nu}} = C\,|B|^{1/q+\lambda}\prod_{i=1}^{2}\|b_i\|_{CBMO^{s_i\mu_i}}\|f\|_{B^{p,\nu}}。$$

对于 J_{12}，因为从 $\sum_{i=1}^{2}1/s_i+1/s<1/p'$ 可以推出 $1/s+1/p<1$，因此由 Hölder 不等式可得

$$|T_\Omega f_2(x)| \leqslant C\sum_{k=1}^{\infty}\int_{2^{k+1}B\backslash 2^kB}\frac{\Omega(x-y)}{|x-y|^n}f(y)\,\mathrm{d}y \leqslant C\sum_{k=1}^{\infty}|2^kB|^{-1}\left(\int_{2^{k+1}B}|f(y)|^p\,\mathrm{d}y\right)^{1/p}\left(\int_{2^{k+1}B}|\Omega(x-y)|^s\,\mathrm{d}y\right)^{1/s}|2^{k+1}B|^{1-1/s-1/p} \leqslant C\sum_{k=1}^{\infty}|2^kB|^{-1/s-1/p}|2^{k+1}B|^{1/p+\nu}\|f\|_{B^{p,\nu}}\left(\int_{2^{k+1}B}|\Omega(x-y)|^s\,\mathrm{d}y\right)^{1/s} = C\sum_{k=1}^{\infty}|2^kB|^{\nu-1/s}\|f\|_{B^{p,\nu}}\left(\int_{2^{k+1}B}|\Omega(x-y)|^s\,\mathrm{d}y\right)^{1/s},$$

又由 $x\in B$，$y\in 2^{k+1}B$ 可得 $x-y\in 2^{k+2}B$，注意定理中的条件 $\Omega\in L^s(S^{n-1})$，从而有

$$\left(\int_{2^{k+1}B}|\Omega(x-y)|^s\,\mathrm{d}y\right)^{1/s} = \left(\int_{2^{k+2}B}|\Omega(z)|^s\,\mathrm{d}z\right)^{1/s} = \left(\int_0^{2^{k+2}R}\int_{S^{n-1}}|\Omega(z')|^s\,\mathrm{d}\sigma(z')r^{n-1}\,\mathrm{d}r\right)^{1/s} = C|2^{k+2}B|^{1/s}\|\Omega\|_{L^s(S^{n-1})} \leqslant C|2^kB|^{1/s},$$

注意到 $\nu<0$，从而得到

$$|T_\Omega f_2(x)| \leqslant C\sum_{k=1}^{\infty}|2^kB|^{\nu}\|f\|_{B^{p,\nu}} \leqslant C\,|B|^{\nu}\|f\|_{B^{p,\nu}}。$$

故由 Hölder 不等式可得

$$J_{12} \leqslant C\,|B|^{\nu}\|f\|_{B^{p,\nu}}\prod_{i=1}^{2}\left(\int_B (b_i(x)-|b_i|_B)^{s_i}\,\mathrm{d}x\right)^{1/s_i}|B|^{1/p} \leqslant C\,|B|^{\nu+1/p+1/s_1+\mu_1+1/s_2+\mu_2}\|f\|_{B^{p,\nu}}\prod_{i=1}^{2}\|b_i\|_{CBMO^{s_i,\mu_i}} = C\,|B|^{1/q+\lambda}\prod_{i=1}^{2}\|b_i\|_{CBMO^{s_i,\mu_i}}\|f\|_{B^{p,\nu}}。$$

综上可得

$$J_1 \leqslant C\,|B|^{1/q+\lambda}\prod_{i=1}^{2}\|b_i\|_{CBMO^{s_i,\mu_i}}\|f\|_{B^{p,\nu}}。$$

2) J_4 部分

首先由 f 的分解可得

$$J_4 \leqslant \left(\int_B |T_\Omega((b_1(x)-|b_1|_B)(b_2(x)-|b_2|_B)(f_1))(x)|^q\,\mathrm{d}x\right)^{1/q} + \left(\int_B |T_\Omega((b_1(x)-|b_1|_B)(b_2(x)-|b_2|_B)(f_2))(x)|^q\,\mathrm{d}x\right)^{1/q} =: J_{41}+J_{42}。$$

对于 J_{41}，根据 $1/q=\sum_{i=1}^{m}1/s_i+1/p$，因此由算子 T_Ω 的 $L^q(q>1)$ 有界性和 Hölder 不等式得

$$J_{41} \leqslant C\|(b_1-|b_1|_B)(b_2-|b_2|_B)(f_1)\|_{L^q(R^n)} \leqslant C\prod_{i=1}^{2}\left(\int_B (b_i(x)-|b_i|_B)^{s_i}\,\mathrm{d}x\right)^{1/s_i}\left(\int_B |f(x)|^p\,\mathrm{d}x\right)^{1/p} \leqslant C\,|B|^{1/q+\lambda}\prod_{i=1}^{2}\|b_i\|_{CBMO^{s_i,\mu_i}}\|f\|_{B^{p,\nu}}。$$

对于 J_{42},因为从 $\sum_{i=1}^{2} 1/s_i + 1/s < 1/p'$ 可以推出 $\sum_{i=1}^{2} 1/s_i + 1/s + 1/p < 1$,因此由 Hölder 不等式,$\lambda = \mu_1 + \mu_2 + \nu < 0$ 及 $(\int_{2^{k+1}B} |\Omega(x-y)|^s \mathrm{d}y)^{1/s} \leqslant C|2^k B|^{1/s}$ 可得

$$|T_\Omega((b_1(x) - |b_1|_B)(b_2(x) - |b_2|_B)(f_2))(x)| \leqslant$$

$$C\sum_{k=1}^{\infty}\int_{2^{k+1}B\backslash 2^k B} \frac{|\Omega(x-y)|}{|x-y|^n} |(b_1(y) - |b_1|_B)(b_2(y) - |b_2|_B) f_2(y)| \mathrm{d}y \leqslant$$

$$C\sum_{k=1}^{\infty} |2^k B|^{-1} \prod_{i=1}^{2} (\int_{2^{k+1}B} (b_i(y) - |b_i|_B)^{s_i} \mathrm{d}y)^{1/s_i} (\int_{2^{k+1}B} (f(y))^p \mathrm{d}y)^{1/p} (\int_{2^{k+1}B} (\Omega(x-y))^s \mathrm{d}y)^{1/s} |2^{k+1}B|^{1-1/s_1-1/s_2-1/p-1/s} \leqslant$$

$$C\sum_{k=1}^{\infty} |2^k B|^{-1/s_1-1/s_2-1/p-1/s} |2^k B|^{1/s_1+\mu_i+1/s_2+\mu_2+1/p+\nu} \prod_{i=1}^{2} \| b_i \|_{\mathrm{CBMO}^{s_i,\mu_i}} \| f \|_{B^{p,\nu}} (\int_{2^{k+1}B} (\Omega(x-y))^s \mathrm{d}y)^{1/s} \leqslant$$

$$C\sum_{k=1}^{\infty} |2^k B|^{\mu_i+\mu_2+\nu-1/s} \prod_{i=1}^{2} \| b_i \|_{\mathrm{CBMO}^{s_i,\mu_i}} \| f \|_{B^{p,\nu}} |2^k B|^{1/s} \leqslant C|B|^{\lambda} \prod_{i=1}^{2} \| b_i \|_{\mathrm{CBMO}^{s_i,\mu_i}} \| f \|_{B^{p,\nu}},$$

所以有 $J_{42} \leqslant C|B|^{\lambda} \prod_{i=1}^{2} \| b_i \|_{\mathrm{CBMO}^{s_i,\mu_i}} \| f \|_{B^{p,\nu}} |B|^{1/q} \leqslant$

$$C|B|^{\lambda+1/q} \prod_{i=1}^{2} \| b_i \|_{\mathrm{CBMO}^{s_i,\mu_i}} \| f \|_{B^{p,\nu}}。$$

综上可得

$$J_4 \leqslant C|B|^{\lambda+1/q} \prod_{i=1}^{2} \| b_i \|_{\mathrm{CBMO}^{s_i,\mu_i}} \| f \|_{B^{p,\nu}}。$$

3)J_2 部分

记 $1/q_1 = 1/q - 1/s_1 = 1/s_2 + 1/p$,则由 Hölder 不等式和 f 的分解可得

$$J_2 \leqslant C\int_B (b_1(y) - |b_1|_B)^{s_1} \mathrm{d}y)^{1/s_1} \int_B |T_\Omega((b_2(x) - \| b_2 \|_B)(f)(y))|^{q_1} \mathrm{d}y)^{1/q_1} \leqslant$$

$$C|B|^{1/s_1+\mu_1} \| b_1 \|_{\mathrm{CBMO}^{s_1,\mu_1}} \int_B |T_\Omega((b_2(x) - \| b_2 \|_B)(f_1)(y))|^{q_1} \mathrm{d}y)^{1/q_1} +$$

$$C|B|^{1/s_1+\mu_1} \| b_1 \|_{\mathrm{CBMO}^{s_1,\mu_1}} \int_B |T_\Omega((b_2(x) - |b_2|_B)(f_2)(y))|^{q_1} \mathrm{d}y)^{1/q_1} =$$

$$C|B|^{1/s_1+\mu_1} \| b_1 \|_{\mathrm{CBMO}^{s_1,\mu_1}} (K_{21} + K_{22})。$$

又类似于 J_{41} 和 J_{42} 的证明方法并且注意到 $1/q_1 = 1/s_2 + 1/p$ 易得

$$K_{21} \leqslant C|B|^{1/s_2+\mu_2+1/p+\nu} \| b_2 \|_{\mathrm{CBMO}^{s_2,\mu_2}} \| f \|_{B^{p,\nu}},$$

$$K_{22} \leqslant C|B|^{1/s_2+\mu_2+1/p+\nu} \| b_2 \|_{\mathrm{CBMO}^{s_2,\mu_2}} \| f \|_{B^{p,\nu}},$$

故有

$$J_2 \leqslant C|B|^{\lambda+1/q} \prod_{i=1}^{2} \| b_i \|_{\mathrm{CBMO}^{s_i\mu_i}} \| f \|_{B^{p,\nu}}。$$

4)J_3 部分

由于 J_3 部分和 J_2 部分是对称的,因此类似于 J_2 的证明方法可得

$$J_3 \leqslant C|B|^{\lambda+1/q} \prod_{i=1}^{2} \| b_i \|_{\mathrm{CBMO}^{s_i\mu_i}} \| f \|_{B^{p,\nu}}。$$

综合 1)、2)、3)、4) 可得

$$(\int_B |T^2_{\Omega,\vec{b}}(f)(x)|^q \mathrm{d}x)^{1/q} \leqslant C|B|^{\lambda+1/q} \prod_{i=1}^{2} \| b_i \|_{\mathrm{CBMO}^{s_i\mu_i}} \| f \|_{B^{p,\nu}},$$

即

$$(|B|^{-\lambda-1/q} \int_B |T^2_{\Omega,\vec{b}}(f)(x)|^q \mathrm{d}x)^{1/q} \leqslant C\prod_{i=1}^{2} \| b_i \|_{\mathrm{CBMO}^{s_i,\mu_i}} \| f \|_{B^{p,\nu}}。$$

对上式两边取上确界,结合 λ-中心 Morrey 空间相关定义,定理 1 得证。

(下转第 270 页)