浙江科技学院学报,第 23 卷第 4 期,2011 年 8 月
Journal of Zhejiang University of Science and Technology
Vol. 23 No. 4, Aug. 2011

DOI: 10.3969/j. issn. 1671-8798. 2011. 04. 002

具有两个独立参数的 Hardy 型积分不等式

陈广生

(广西现代职业技术学院 计算机工程系,广西 河池 547000)

摘　要:引入 2 个独立参数 λ_1,λ_2,应用权函数方法和实分析技巧,建立了若干推广的 Hardy 型积分不等式,并证明了其常数因子是最佳值,考虑了等价式及一些特殊结果。

关键词:Hardy 型积分不等式;权函数;等价式;最佳常数因子

中图分类号:O178　　**文献标志码**:A　　**文章编号**:1671-8798(2011)04-0262-06

Hardy-type integral inequalities with two independent parameters

CHEN Guang-sheng

(Department of Computer Engineering, Guangxi Modern Vocational Technology College, Hechi 547000, China)

Abstract: By introducing two independent parameters λ_1,λ_2, and using weight function and the method of real analysis, we establish some extended Hardy-type integral inequalities, and prove their constant factors to be the optimum value. Also we have considered the equivalent forms and some particular results.

Key words: Hardy-type integral inequality; weight function; equivalent form; the best constant factor

1　引　言

设 $L^2(0,\infty)$ 为实空间,$f(x),g(x)\in L^2(0,\infty)$,且 $0<\int_0^\infty f^2(x)\mathrm{d}x<\infty$,$0<\int_0^\infty g^2(x)\mathrm{d}x<\infty$,则有如下著名的 Hilbert 积分不等式[1]:

$$\int_0^\infty\int_0^\infty \frac{f(x)g(y)}{x+y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y<\pi\left[\int_0^\infty f^2(x)\mathrm{d}x\int_0^\infty g^2(x)\mathrm{d}x\right]^{1/2} \tag{1}$$

收稿日期:2011-03-21

基金项目:广西壮族自治区教育厅科研项目(2009B148)

作者简介:陈广生(1979—　),男,广西壮族自治区北流人,讲师,硕士,主要从事解析不等式研究。

这里，常数因子 π 是最佳值。

1925 年，Hardy[2] 引入一对共轭指数 (p,q)，即 $1/p+1/q=1$，将式(1) 推广为

$$\int_0^\infty\int_0^\infty \frac{f(x)g(y)}{x+y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y<\frac{\pi}{\sin(\pi/p)}\left[\int_0^\infty f^p(x)\mathrm{d}x\right]^{1/p}\left[\int_0^\infty g^q(x)\mathrm{d}x\right]^{1/q} \tag{2}$$

这里，常数因子 $\frac{\pi}{\sin(\pi/p)}(p>1)$ 是最佳值。

Hardy[1] 还建立了式(2) 的如下等价式：

$$\int_0^\infty\left[\int_0^\infty \frac{f(x)}{x+y}\mathrm{d}x\right]^p\mathrm{d}y<\left[\frac{\pi}{\sin(\pi/p)}\right]^p\int_0^\infty f^p(x)\mathrm{d}x \tag{3}$$

适当变化式(3) 的核及积分区间，Hardy[3] 建立了如下具有最佳常数因子的 Hardy 积分不等式：

$$\int_0^\infty\left[\frac{1}{y}\int_0^y f(x)\mathrm{d}x\right]^p\mathrm{d}y<q^p\int_0^\infty f^p(x)\mathrm{d}x \tag{4}$$

$$\int_0^\infty\left[\int_x^\infty \frac{1}{y}g(y)\mathrm{d}y\right]^p\mathrm{d}x<q^q\int_0^\infty g^q(x)\mathrm{d}x \tag{5}$$

式(1) ～(5) 在分析学中有重要的应用[4]。文献[5] 和文献[6] 引入单参量及 2 对共轭指数 (p,q)，(r,s)，将不等式(2) 推广为如下形式：

设 $p>1,1/p+1/q=1,r>1,1/r+1/s=1,\lambda>0,f(x)\geqslant0,g(x)\geqslant0$，使 $0<\int_0^\infty x^{p(1-\lambda/r)-1}f^p(x)\mathrm{d}x<\infty$，$0<\int_0^\infty x^{q(1-\lambda/s)-1}g^q(x)\mathrm{d}x<\infty$，则有如下等价式：

$$\int_0^\infty\int_0^\infty \frac{f(x)g(y)}{x^\lambda+y^\lambda}\mathrm{d}x\mathrm{d}y<\frac{\pi}{\lambda\sin(\pi/r)}\times\left[\int_0^\infty x^{p(1-\lambda/r)-1}f^p(x)\mathrm{d}x\right]^{1/p}\left[\int_0^\infty x^{q(1-\lambda/s)-1}g^q(x)\mathrm{d}x\right]^{1/q} \tag{6}$$

$$\int_0^\infty\int_0^\infty \frac{f(x)g(y)}{(x+y)^\lambda}\mathrm{d}x\mathrm{d}y<B(\lambda/r,\lambda/s)\times\left[\int_0^\infty x^{p(1-\lambda/r)-1}f^p(x)\mathrm{d}x\right]^{1/p}\left[\int_0^\infty x^{q(1-\lambda/s)-1}g^q(x)\mathrm{d}x\right]^{1/q} \tag{7}$$

这里，常数因子 $\frac{\pi}{\lambda\sin(\pi/r)}$ 及 $B(\lambda/r,\lambda/s)$ 都是最佳值。

文献[7] 利用参量化思想，将式(4) 和式(5) 进行推广，给出了如下的 Hardy 型积分不等式。

设 $p>1,1/p+1/q=1,r>0,(r\neq1),1/r+1/s=1,\lambda>0,f(x)\geqslant0,g(x)\geqslant0$，使 $0<\int_0^\infty x^{p(1-\lambda/r)-1}f^p(x)\mathrm{d}x<\infty,0<\int_0^\infty x^{q(1-\lambda/s)-1}g^q(x)\mathrm{d}x<\infty$，则有如下等价式：

$$\int_0^\infty\int_0^y \frac{1}{y^\lambda}f(x)g(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^\infty\int_x^\infty \frac{1}{y^\lambda}f(x)g(y)\mathrm{d}y\mathrm{d}x<$$
$$r/\lambda\left[\int_0^\infty x^{p(1-\lambda/r)-1}f^p(x)\mathrm{d}x\right]^{1/p}\left[\int_0^\infty x^{q(1-\lambda/s)-1}g^q(x)\mathrm{d}x\right]^{1/q} \tag{8}$$

$$\int_0^\infty y^{-p\lambda/r-1}\left[\int_0^y f(x)\mathrm{d}x\right]^p\mathrm{d}y<[r/\lambda]^p\int_0^\infty x^{p(1-\lambda/r)-1}f^p(x)\mathrm{d}x \tag{9}$$

$$\int_0^\infty x^{q\lambda/r-1}\left[\int_x^\infty \frac{1}{y^\lambda}g(y)\mathrm{d}y\right]^q\mathrm{d}x<[r/\lambda]^q\int_0^\infty x^{q(1-\lambda/s)-1}g^q(x)\mathrm{d}x \tag{10}$$

这里，常数因子 r/λ，$[r/\lambda]^p$ 和 $[r/\lambda]^q$ 均为最佳值。

本研究的目的是通过引入 2 个独立参数 λ_1,λ_2，利用权函数方法和实分析技巧，建立式(8)、(9) 和(10) 的推广式，证明其常数因子为最佳值，并给出一些特殊结果。

2　主要结果

定理 1　设 $\lambda_1,\lambda_2>0,p>1,r>0(r\neq1),1/p+1/q=1,1/r+1/s=1,f(x),g(x)$ 为 $(0,\infty)$ 上

的非负可测函数，且 $0<\int_0^\infty x^{p(1-\lambda_1/r)-1}f^p(x)\mathrm{d}x<\infty$，$0<\int_0^\infty x^{q(1-\lambda_2/s)-1}g^q(x)\mathrm{d}x<\infty$，则有如下积分不等式：

$$I_{\lambda_1,\lambda_2}=\int_0^\infty\int_0^{y^{\lambda_2/\lambda_1}}\frac{1}{y^{\lambda_2}}f(x)g(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^\infty\int_{x^{\lambda_1/\lambda_2}}^\infty\frac{1}{y^{\lambda_2}}f(x)g(y)\mathrm{d}y\mathrm{d}x<$$
$$\frac{r}{\lambda_1^{1/q}\lambda_2^{1/p}}\left[\int_0^\infty x^{p(1-\lambda_1/r)-1}f^p(x)\mathrm{d}x\right]^{\frac{1}{p}}\left[\int_0^\infty x^{q(1-\lambda_2/s)-1}g^q(x)\mathrm{d}x\right]^{1/q}\tag{11}$$

这里，常数因子 $\frac{r}{\lambda_1^{1/q}\lambda_2^{1/p}}$ 是最佳值。特别地，当 $r=p$，$s=q$ 时，有如下不等式：

$$I_{\lambda_1,\lambda_2}<\frac{p}{\lambda_1^{1/q}\lambda_2^{1/p}}\left[\int_0^\infty x^{p-\lambda_1-1}f^p(x)\mathrm{d}x\right]^{1/p}\left[\int_0^\infty x^{q-\lambda_2-1}g^q(x)\mathrm{d}x\right]^{1/q}\tag{12}$$

$$I_{\lambda_1,\lambda_2}<\frac{q}{\lambda_1^{1/q}\lambda_2^{1/p}}\left[\int_0^\infty x^{(p-1)(1-\lambda_1)}f^p(x)\mathrm{d}x\right]^{1/p}\left[\int_0^\infty x^{(q-1)(1-\lambda_2)}g^q(x)\mathrm{d}x\right]^{1/q}\tag{13}$$

证明 设 $k(x^{\lambda_1},y^{\lambda_2})=\frac{1}{y^{\lambda_2}}$，$x^{\lambda_1/\lambda_2}\leqslant y$；$k(x^{\lambda_1},y^{\lambda_2})=0$，$x^{\lambda_1/\lambda_2}>y$，配方并由 Hölder 不等式[8] 得：

$$I_{\lambda_1,\lambda_2}=\int_0^\infty\int_0^\infty k(x^{\lambda_1},y^{\lambda_2})f(x)g(y)\frac{y^{(\lambda_2/s-1)/p}}{x^{(\lambda_1/r-1)/q}}\frac{x^{(\lambda_1/r-1)/q}}{y^{(\lambda_2/s-1)/p}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\leqslant$$
$$\left\{\int_0^\infty\int_0^\infty k(x^{\lambda_1},y^{\lambda_2})f^p(x)x^{\lambda_1/r}y^{\lambda_2/s-1}x^{p(1-\lambda_1/r)-1}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right\}^{1/p}\times$$
$$\left\{\int_0^\infty\int_0^\infty k(x^{\lambda_1},y^{\lambda_2})g^q(y)x^{\lambda_1/r-1}y^{\lambda_2/s}y^{q(1-\lambda_2/s)-1}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right\}^{1/q}=$$
$$\left\{\int_0^\infty\left[\int_{x^{\lambda_1/\lambda_2}}^\infty y^{-\lambda_2}x^{\lambda_1/r}y^{\lambda_2/s-1}x^{p(1-\lambda_1/r)-1}\mathrm{d}y\right]f^p(x)\mathrm{d}x\right\}\times$$
$$\left\{\int_0^\infty\left[\int_0^{y^{\lambda_2/\lambda_1}}x^{\lambda_1/r-1}y^{\lambda_2/s}y^{q(1-\lambda_2/s)-1}\mathrm{d}x\right]g^q(y)\mathrm{d}y\right\}=$$
$$\frac{r}{\lambda_1^{1/q}\lambda_2^{1/p}}\left\{\int_0^\infty x^{p(1-\lambda_1/r)-1}f^p(x)\mathrm{d}x\right\}^{1/p}\left\{\int_0^\infty y^{q(1-\lambda_2/s)-1}g^q(y)\mathrm{d}y\right\}^{1/q}\tag{14}$$

下面证明式(14) 中间取严格不等号，若不然，必存在不全为 0 的常数 A 和 B，使得：$Af^p(x)y^{\lambda_2/s-1}x^{(p-1)(1-\lambda_1/r)}=Bg^q(y)x^{\lambda_1/r-1}y^{(q-1)(1-\lambda_2/s)}$ a. e 于$(0,\infty)\times(0,\infty)$。即有 $Ax^{p(1-\lambda_1/r)}f^p(x)=By^{q(1-\lambda_2/s)}g^q(y)$ a. e 于$(0,\infty)\times(0,\infty)$。于是有常数 C，使 $Ax^{p(1-\lambda_1/r)-1}f^p(x)=Cx^{-1}$ a. e 于$(0,\infty)$。不妨设 $A\neq 0$，则可得 $x^{p(1-\lambda_1/r)-1}f^p(x)=\frac{C}{A}x^{-1}$ a. e 于$(0,\infty)$，无论 C 是否为 0，积分的结果必与 $0<\int_0^\infty x^{p(1-\lambda_1/r)-1}f^p(x)\mathrm{d}x<\infty$ 相矛盾。于是，式(11) 成立。

设 $n\in N$，$n>\max\{\frac{r}{\lambda_1},\frac{s}{\lambda_2}\}$，定义 $f_n(x)$，$g_n(x)$ 为：

$$f_n(x)=0\quad x\in(0,1)\ ;\ f_n(x)=x^{\lambda_1/r-1-\lambda_1/np}\quad x\in[1,\infty)$$
$$g_n(x)=0\quad x\in(0,1)\ ;\ g_n(x)=x^{\lambda_2/s-1-\lambda_2/nq}\quad x\in[1,\infty)$$

若式(11) 的常数因子不是最佳值，则存在正数 $K<\frac{r}{\lambda_1^{1/q}\lambda_2^{1/p}}$，使式(11) 的常数因子 $\frac{r}{\lambda_1^{1/q}\lambda_2^{1/p}}$ 换上 K 仍成立。特别地，有

$$K=\frac{K\lambda_1^{1/p}\lambda_2^{1/q}}{n}\left\{\int_0^\infty x^{p(1-\lambda_1/r)-1}f_n^p(x)\mathrm{d}x\right\}^{1/p}\left\{\int_0^\infty y^{q(1-\lambda_2/s)-1}g_n^q(y)\mathrm{d}y\right\}^{1/q}>\frac{\lambda_1^{1/p}\lambda_2^{1/q}}{n}\int_0^\infty\int_{x^{\lambda_1/\lambda_2}}^\infty\frac{1}{y^{\lambda_2}}f_n(x)g_n(y)\mathrm{d}y\mathrm{d}x=$$
$$\frac{\lambda_1^{1/p}\lambda_2^{1/q}}{n}\int_1^\infty x^{\lambda_1/r-1-\lambda_1/np}\left[\int_{x^{\lambda_1/\lambda_2}}^\infty\frac{1}{y^{\lambda_2}}y^{\lambda_2/s-1-\lambda_2/nq}\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x=\frac{\lambda_1^{1/p}\lambda_2^{1/q}}{n}\frac{1}{\lambda_2/r+\lambda_2/nq}\int_1^\infty x^{-1-\lambda_1/n}\mathrm{d}x=$$

$$\frac{\lambda_1^{1/p}\lambda_2^{1/q}}{n}\frac{1}{\lambda_2/r+\lambda_2/nq}\frac{n}{\lambda_1}=\frac{\lambda_1^{1/p}\lambda_2^{1/q}}{\lambda_1\lambda_2(1/r+1/nq)}=\frac{1}{\lambda_1^{1/q}\lambda_2^{1/p}(1/r+1/nq)} \tag{15}$$

式(15) 取极限，令 $n\to\infty$，由保号性，有 $K\geqslant\frac{r}{\lambda_1^{1/q}\lambda_2^{1/p}}$，故 $K=\frac{r}{\lambda_1^{1/q}\lambda_2^{1/p}}$ 为式(11) 的最佳值，证毕。

定理 2　设 $\lambda_1,\lambda_2>0$，$p>1$，$r>0(r\neq1)$，$1/p+1/q=1$，$1/r+1/s=1$，$f(x)$，$g(x)$ 为 $(0,\infty)$ 上的非负可测函数，且 $0<\int_0^\infty x^{p(1-\lambda_1/r)-1}f^p(x)\mathrm{d}x<\infty$，$0<\int_0^\infty x^{q(1-\lambda_2/s)-1}g^q(x)\mathrm{d}x<\infty$，则有如下积分不等式：

$$J_{\lambda_1,\lambda_2}=\int_0^\infty y^{-p\lambda_2/r-1}[\int_0^{y^{\lambda_2/\lambda_1}}f(x)\mathrm{d}x]^p\mathrm{d}y<[\frac{r}{\lambda_1^{1/q}\lambda_2^{1/p}}]^p\int_0^\infty x^{p(1-\lambda_1/r)-1}f^p(x)\mathrm{d}x \tag{16}$$

$$L_{\lambda_1,\lambda_2}=\int_0^\infty x^{q\lambda_1/r-1}[\int_{x^{\lambda_1/\lambda_2}}^\infty\frac{1}{y^{\lambda_2}}g(y)\mathrm{d}y]^q\mathrm{d}x<[\frac{r}{\lambda_1^{1/q}\lambda_2^{1/p}}]^q\int_0^\infty x^{q(1-\lambda_2/s)-1}g^q(x)\mathrm{d}x \tag{17}$$

这里，常数因子 $[\frac{r}{\lambda_1^{1/q}\lambda_2^{1/p}}]^p$ 和 $[\frac{r}{\lambda_1^{1/q}\lambda_2^{1/p}}]^q$ 均为最佳值，且式(16)、(17) 与式(11) 等价。特别地，

1) 当 $r=p$ 时，有如下与式(12) 等价的不等式：

$$J_{\lambda_1,\lambda_2}=\int_0^\infty y^{-\lambda_2-1}[\int_0^{y^{\lambda_2/\lambda_1}}f(x)\mathrm{d}x]^p\mathrm{d}y<[\frac{p}{\lambda_1^{1/q}\lambda_2^{1/p}}]^p\int_0^\infty x^{p-\lambda_1-1}f^p(x)\mathrm{d}x \tag{18}$$

$$L_{\lambda_1,\lambda_2}=\int_0^\infty x^{(q-1)\lambda_1-1}[\int_{x^{\lambda_1/\lambda_2}}^\infty\frac{1}{y^{\lambda_2}}g(y)\mathrm{d}y]^q\mathrm{d}x<[\frac{p}{\lambda_1^{1/q}\lambda_2^{1/p}}]^q\int_0^\infty x^{q-\lambda_2-1}g^q(x)\mathrm{d}x \tag{19}$$

2) 当 $r=q$ 时，有如下与式(13) 等价的不等式：

$$J_{\lambda_1,\lambda_2}=\int_0^\infty y^{(1-p)\lambda_2-1}[\int_0^{y^{\lambda_2/\lambda_1}}f(x)\mathrm{d}x]^p\mathrm{d}y<[\frac{q}{\lambda_1^{1/q}\lambda_2^{1/p}}]^p\int_0^\infty x^{(p-1)(1-\lambda_1)}f^p(x)\mathrm{d}x \tag{20}$$

$$L_{\lambda_1,\lambda_2}=\int_0^\infty x^{\lambda_1-1}[\int_{x^{\lambda_1/\lambda_2}}^\infty\frac{1}{y^{\lambda_2}}g(y)\mathrm{d}y]^q\mathrm{d}x<[\frac{q}{\lambda_1^{1/q}\lambda_2^{1/p}}]^q\int_0^\infty x^{(q-1)(1-\lambda_2)}g^q(x)\mathrm{d}x \tag{21}$$

证明　设 $I_{\lambda_1,\lambda_2}=\int_0^\infty\frac{1}{y^{\lambda_2}}[\int_0^{y^{\lambda_2/\lambda_1}}f(x)\mathrm{d}x]g(y)\mathrm{d}y$，在 $(0,\infty)$ 上定义有界可测函数 $[f(x)]_n$ 如下：

$$[f(x)]_n=\min\{n,f(x)\}=\begin{cases}f(x), & f(x)\leqslant n,\\ n, & f(x)>n。\end{cases}$$

因 $0<\int_0^\infty x^{p(1-\lambda_1/r)-1}f^p(x)\mathrm{d}x<\infty$，故存在 $n_0\in N$，使得当 $n\geqslant n_0$ 时，有 $0<\int_{1/n}^n x^{p(1-\lambda_1/r)-1}[f(x)]_n^p\mathrm{d}x<\infty$，令 $g_n(y)=y^{-p\lambda_2/r-1}[\int_{1/n}^{y^{\lambda_2/\lambda_1}}[f(x)]_n\mathrm{d}x]^{p-1}>0$，$1/n\leqslant y\leqslant n$，$n\geqslant n_0$，必存在 $a>0$，使得 $[f(x)]_n\leqslant n\leqslant ax^{\lambda_1/r-1}$，$x\in[1/n,n]$。当 $n\geqslant n_0$ 时，有

$$\begin{aligned}&0<\int_{1/n}^n y^{q(1-\lambda_2/s)-1}g_n^q(y)\mathrm{d}y=\int_{1/n}^n y^{-p\lambda_2/r-1}[\int_{1/n}^{y^{\lambda_2/\lambda_1}}[f(x)]_n\mathrm{d}x]^p\mathrm{d}y\leqslant\\&a^p\int_{1/n}^n y^{-p\lambda_2/r-1}[\int_0^{y^{\lambda_2/\lambda_1}}x^{\lambda_1/r-1}\mathrm{d}x]^p\mathrm{d}y=\\&a^p(r/\lambda_1)^p\int_{1/n}^n y^{-1}\mathrm{d}y=2a^p(r/\lambda_1)^p\ln n<\infty\end{aligned} \tag{22}$$

由式(11)，当 $x\notin[1/n,n]$，$g_n(x)=[f(x)]_n=0$，因此有

$$\begin{aligned}&0<\int_{1/n}^n y^{q(1-\lambda_2/s)-1}g_n^q(y)\mathrm{d}y=\int_{1/n}^n y^{-p\lambda_2/r-1}[\int_{1/n}^{y^{\lambda_2/\lambda_1}}[f(x)]_n\mathrm{d}x]^p\mathrm{d}y=\\&\int_{1/n}^n\int_{1/n}^{y^{\lambda_2/\lambda_1}}y^{-\lambda_2}[f(x)]_n g_n(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\leqslant\\&\frac{r}{\lambda_1^{1/q}\lambda_2^{1/p}}[\int_{1/n}^n x^{p(1-\lambda_1/r)-1}[f(x)]_n^p\mathrm{d}x]^{1/p}[\int_{1/n}^n y^{q(1-\lambda_2/s)-1}g_n^q(y)\mathrm{d}y]^{1/q}<\infty\end{aligned} \tag{23}$$

$$0<\int_{1/n}^{n}y^{q(1-\lambda_2/s)-1}g_n^q(y)\mathrm{d}y<[\frac{r}{\lambda_1^{1/q}\lambda_2^{1/p}}]^p\int_0^\infty x^{p(1-\lambda_1/r)-1}f^p(x)\mathrm{d}x<\infty \tag{24}$$

因而 $0<\int_0^\infty y^{q(1-\lambda_2/s)-1}g_\infty^q(y)\mathrm{d}y=J_{\lambda_1,\lambda_2}<\infty$。由条件 $0<\int_0^\infty x^{p(1-\lambda_1/r)-1}f^p(x)\mathrm{d}x<\infty$，当 $n\to\infty$ 时，式(11)、式(23) 和式(24) 取严格不等号；故式(16) 成立。

反之，设式(16) 成立，由 Holder 不等式，有

$$I_{\lambda_1,\lambda_2}=\int_0^\infty(y^{\lambda_2/s-1/p}\int_0^{y^{\lambda_2/\lambda_1}}f(x)\mathrm{d}x)(y^{1/p-\lambda_2/s}g(y))\mathrm{d}y\leqslant J_{\lambda_1,\lambda_2}^{1/p}\{\int_0^\infty y^{q(1-\lambda_2/s)-1}g^q(y)\mathrm{d}y\}^{1/q} \tag{25}$$

再由式(16) 得式(11)，因此式(16) 和式(11) 等价。

若式(11) 的常数因子不是最佳值，则由式(25) 易知式(11) 的常数因子也不是最佳的，矛盾。

同法，取 $I_{\lambda_1,\lambda_2}=\int_0^\infty[\int_{x^{\lambda_1/\lambda_2}}^\infty\frac{1}{y^{\lambda_2}}g(y)\mathrm{d}y]f(x)\mathrm{d}x$，定义 $[g(y)]_n$，$f_n(x)=x^{\lambda_1-1}[\int_{x^{\lambda_1/\lambda_2}}^n[g(y)]_n\mathrm{d}y]^{q-1}$，建立不等式 $I_{\lambda_1,\lambda_2}\leqslant[\int_0^\infty x^{p(1-\lambda_1/r)-1}f^p(x)\mathrm{d}x]^{1/p}L_{\lambda_1,\lambda_2}^{1/q}$，可证式(17) 成立及其等价性、最佳值等结论。证毕。

若在**定理 1**、**定理 2** 的证明中，取 $r=1$，并默认 $1/s=0$，则有

推论 1 设 $\lambda_1,\lambda_2>0$，$p>1$，$1/p+1/q=1$，$f(x)$，$g(x)$ 为 $(0,\infty)$ 上的非负可测函数，且 $0<\int_0^\infty x^{p(1-\lambda_1)-1}f^p(x)\mathrm{d}x<\infty$，$0<\int_0^\infty x^{q-1}g^q(x)\mathrm{d}x<\infty$，则有如下积分不等式：

$$I_{\lambda_1,\lambda_2}<\frac{1}{\lambda_1^{1/q}\lambda_2^{1/p}}[\int_0^\infty x^{p(1-\lambda_1)-1}f^p(x)\mathrm{d}x]^{1/p}[\int_0^\infty x^{q-1}g^q(x)\mathrm{d}x]^{1/q} \tag{26}$$

$$J_{\lambda_1,\lambda_2}=\int_0^\infty y^{-p\lambda_2-1}[\int_0^{y^{\lambda_2/\lambda_1}}f(x)\mathrm{d}x]^p\mathrm{d}y<[\frac{1}{\lambda_1^{1/q}\lambda_2^{1/p}}]^p\int_0^\infty x^{p(1-\lambda_1)-1}f^p(x)\mathrm{d}x \tag{27}$$

$$L_{\lambda_1,\lambda_2}=\int_0^\infty x^{q\lambda_1-1}[\int_{x^{\lambda_1/\lambda_2}}^\infty\frac{1}{y^{\lambda_2}}g(y)\mathrm{d}y]^q\mathrm{d}x<[\frac{1}{\lambda_1^{1/q}\lambda_2^{1/p}}]^q\int_0^\infty x^{q-1}g^q(x)\mathrm{d}x \tag{28}$$

这里，常数因子 $\frac{1}{\lambda_1^{1/q}\lambda_2^{1/p}}$，$[\frac{1}{\lambda_1^{1/q}\lambda_2^{1/p}}]^p$ 和 $[\frac{1}{\lambda_1^{1/q}\lambda_2^{1/p}}]^q$ 均为最佳值。

若在**定理 1**、**定理 2** 的证明中，设 $k(x^{\lambda_1},y^{\lambda_2})=1/y^{\lambda_2}$，$x^{\lambda_1/\lambda_2}\geqslant y$；$k(x^{\lambda_1},y^{\lambda_2})=0$，$x^{\lambda_1/\lambda_2}<y$ 及 $r<0$，则有如下定理：

定理 3 设 $\lambda_1,\lambda_2>0$，$p>1$，$r<0$，$1/p+1/q=1$，$1/r+1/s=1$，$f(x)$，$g(x)$ 为 $(0,\infty)$ 上的非负可测函数，且 $0<\int_0^\infty x^{p(1-\lambda_1/r)-1}f^p(x)\mathrm{d}x<\infty$，$0<\int_0^\infty x^{q(1-\lambda_2/s)-1}g^q(x)\mathrm{d}x<\infty$，则有如下积分不等式：

$$\tilde{I}_{\lambda_1,\lambda_2}=\int_0^\infty\int_{y^{\lambda_2/\lambda_1}}^\infty 1/y^{\lambda_2}f(x)g(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^\infty\int_0^{x^{\lambda_1/\lambda_2}}\frac{1}{y^{\lambda_2}}f(x)g(y)\mathrm{d}y\mathrm{d}x<$$
$$\frac{-r}{\lambda_1^{1/q}\lambda_2^{1/p}}[\int_0^\infty x^{p(1-\lambda_1/r)-1}f^p(x)\mathrm{d}x]^{1/p}[\int_0^\infty x^{q(1-\lambda_2/s)-1}g^q(x)\mathrm{d}x]^{1/q} \tag{29}$$

$$\tilde{J}_{\lambda_1,\lambda_2}=\int_0^\infty y^{-p\lambda_2/r-1}[\int_{y^{\lambda_2/\lambda_1}}^\infty f(x)\mathrm{d}x]^p\mathrm{d}y<[\frac{-r}{\lambda_1^{1/q}\lambda_2^{1/p}}]^p\int_0^\infty x^{p(1-\lambda_1/r)-1}f^p(x)\mathrm{d}x \tag{30}$$

$$\tilde{L}_{\lambda_1,\lambda_2}=\int_0^\infty x^{q\lambda_1/r-1}[\int_0^{x^{\lambda_1/\lambda_2}}\frac{1}{y^{\lambda_2}}g(y)\mathrm{d}y]^q\mathrm{d}x<[\frac{-r}{\lambda_1^{1/q}\lambda_2^{1/p}}]^q\int_0^\infty x^{q(1-\lambda_2/s)-1}g^q(x)\mathrm{d}x \tag{31}$$

这里，常数因子 $\frac{-r}{\lambda_1^{1/q}\lambda_2^{1/p}}$，$[\frac{-r}{\lambda_1^{1/q}\lambda_2^{1/p}}]^p$ 和 $[\frac{-r}{\lambda_1^{1/q}\lambda_2^{1/p}}]^q$ 均为最佳值。特别地，当 $r=-1$，$s=1/2$ 时，有如下等价不等式：

$$\tilde{I}_{\lambda_1,\lambda_2}<\frac{1}{\lambda_1^{1/q}\lambda_2^{1/p}}[\int_0^\infty x^{p(1+\lambda_1)-1}f^p(x)\mathrm{d}x]^{1/p}[\int_0^\infty x^{q(1-2\lambda_2)-1}g^q(x)\mathrm{d}x]^{1/q} \tag{32}$$

$$\widetilde{J}_{\lambda_1,\lambda_2}=\int_0^{\infty}y^{p\lambda_2-1}[\int_{y^{\lambda_2/\lambda_1}}^{\infty}f(x)\mathrm{d}x]^p\mathrm{d}y<[\frac{1}{\lambda_1^{1/q}\lambda_2^{1/p}}]^p\int_0^{\infty}x^{p(1+\lambda_1)-1}f^p(x)\mathrm{d}x \tag{33}$$

$$\widetilde{L}_{\lambda_1,\lambda_2}=\int_0^{\infty}x^{-q\lambda_1-1}[\int_0^{x^{\lambda_1/\lambda_2}}\frac{1}{y^{\lambda_2}}g(y)\mathrm{d}y]^q\mathrm{d}x<[\frac{1}{\lambda_1^{1/q}\lambda_2^{1/p}}]^q\int_0^{\infty}x^{q(1-2\lambda_2)-1}g^q(x)\mathrm{d}x \tag{34}$$

注：1）当 $\lambda_1=\lambda_2=\lambda$ 时，式(11)、(16) 和(17) 分别变为式(8)、(9) 和(10)；

2）当 $\lambda_1=\lambda_2=1$ 时，式(20) 和(21) 分别变为式(4) 和(5)；式(18) 和(19) 分别变为如下等价不等式：

$$\int_0^{\infty}y^{-2}[\int_0^{y}f(x)\mathrm{d}x]^p\mathrm{d}y<p^p\int_0^{\infty}x^{p-2}f^p(x)\mathrm{d}x \tag{35}$$

$$\int_0^{\infty}x^{q-2}[\int_x^{\infty}\frac{1}{y}g(y)\mathrm{d}y]^q\mathrm{d}x<p^q\int_0^{\infty}x^{q-2}g^q(x)\mathrm{d}x \tag{36}$$

参考文献：

[1] HARDY G H, LITTLEWOOD J E, POLYA G. Inequalities[M]. Cambridge: Cambridge University Press, 1952.

[2] HARDT G H. Note on a theorem of hilbert concerning series of positive terms[J]. Proc London Math Soc, 1925, 23(2): 45-46.

[3] HARDY G H. Note on a theorem of Hilbert[J]. Math Zeitschr, 1920, 6: 314-317.

[4] MITRINOVIC D S, PECARIC J E, FINK A M. Inequalities Involving Functions and Their Integrals and Derivatives[M]. Boston: Kluwer Academic Publishers, 1991.

[5] YANG B C, BRNETI I , KRNI M, et al. Generalization of Hilbert and Hardy-Hilbert integral inequalities[J]. Math Ineq Appl, 2005, 8(2): 259-272.

[6] 和炳. 关于 Hilbert 积分不等式的参量化推广[J]. 广东教育学院学报, 2008, 28(3): 18-21.

[7] 杨必成. 参量化的 Hardy 型积分不等式[J]. 上海大学学报：自然科学版, 2010, 16(4): 404-408.

[8] 匡继昌. 常用不等式[M]. 3 版. 济南：山东科学技术出版社, 2004.