浙江科技学院学报，第23卷第6期，2011年12月
Journal of Zhejiang University of Science and Technology
Vol. 23 No. 6, Dec. 2011

DOI：10.3969/j.issn.1671-8798.2011.06.001

颠倒分支定向的链环的 Jones 多项式

陶志雄
（浙江科技学院 理学院，杭州 310023）

摘　要：Lickorish 和 Millett 曾经给出了颠倒一个分支定向前后的链环的 Jones 多项式之间的关系式，利用纽结的 state 来定义 Jones 多项式，现重新给出一个非常简单的证明，并将结论作了推广。
关键词：Jones 多项式；链环；定向
中图分类号：O189.24　　**文献标志码**：A　　**文章编号**：1671-8798(2011)06-0443-02

Jones polynomials of links with the orientations of some components reversed

TAO Zhi-xiong
(School of Sciences, Zhejiang University of Science and Technology, Hangzhou 310023, China)

Abstract: Lickorish and Millett had given a relation between the Jones polynomial of an oriented link and the Jones polynomial of the same link with the orientation of one component reversed. Using the states of a knot to define its Jones polynomial, the author gives a very simple new proof and extends their result.
Key words: Jones polynomial; link; orientation

Jones 多项式一直是很受关注的纽结链环不变量，笔者重新考虑了 Lickorish 等人[1]关于链环的 Jones 多项式的工作：颠倒链环的一个分支定向前后链环的 Jones 多项式之间的一个关系式（他们的证明比较长且复杂），给出了一个非常简单的证明，并推广了他们的结果。结论如下：

定理　设 $L=L(K_1,K_2,\cdots,K_n)$ 是定向的有 n 个分支的链环，$\forall i,j$，$2\lambda_{ij}$ 表示 K_i 与 K_j 间交叉的符号之和，L_k 表示颠倒了 L 中分支 $K_1,K_2,\cdots,K_k$（$k\leqslant n$）的定向后的链环。则

$$V(L_k)=t^{-3\sum\limits_{i=1}^{k}\sum\limits_{j=k+1}^{n}\lambda_{ij}}V(L),\ (k<n),V(L_n)=V(L)。$$

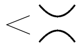
1　基本知识

对于任何一个交叉（图1），当上面的弧段逆时针旋转和下面的弧段重合时，其扫过的那两部分区域记为 A，剩下的两部分区域记为 B，图2表示打通区域 A（A-split），图3表示打通区域 B（B-split）。

收稿日期：2011-03-22
基金项目：浙江科技学院教学研究项目(2009ⅡB-a53)
作者简介：陶志雄(1961—　)，男，浙江省绍兴人，副教授，博士，主要从事几何拓扑学研究及大学数学教学。

定义[1-3] 设 L 是一个纽结或链环，定义尖括弧多项式 $<L>\in \mathbb{Z}[A^{\pm 1}]$，满足：

1) $<\bigcirc>=1$；

2) $<$  $>=A<)\,(>+A^{-1}<$  $>$；

3) $<L\cup\bigcirc>=(-A^2-A^{-2})<L>$。

这里条件 2 中 3 个图表示 3 个链环的投影图，除了所示的部分相异外其他处均恒同。

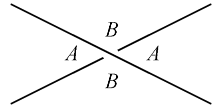


图 1 交叉

Fig. 1 Crossing

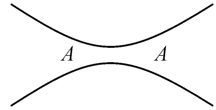


图 2 打通 A

Fig. 2 A-split

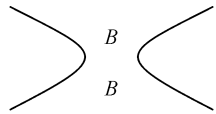


图 3 打通 B

Fig. 3 B-split

则对于一个有定向的纽结或链环 L，Jones 多项式[1-4]

$$V(L)=(-A^3)^{-w(L)}<L>|_{A=t^{-1/4}}, \tag{1}$$

其中 $w(L)$ 表 L 的所有交叉符号[1-4]之和。

注：文献[1]中 Jones 多项式的 t 即本文的 t^{-1}。

显然，每一个纽结和链环在固定投影之下，和每个交叉相关的区域 A 和区域 B 也随之确定，每个交叉可以分别选择打通 A 或打通 B，由此可以得到一些平凡的圈(loops)，即平凡链环，例如图 4[5]。记 S 为这样的一个选择，称为一个 state[3]。所以一个有 n 个交叉的纽结或链环，故 S 共有 2^n 个，设 $a(S)$ 和 $b(S)$ 分别表示 S 中打通 A 和打通 B 的数目，$|S|$ 表示完成打通之后所成的平凡链环中圈的个数。图 4 例中，$a(S)=1$，$b(S)=2$，$|S|=1$。

引理[2-3] $<L>=\sum\limits_{S}A^{a(S)-b(S)}(-A^2-A^{-2})^{|S|-1}$。

这里 $\sum\limits_{S}$ 表示对所有可能的 state S 求和。

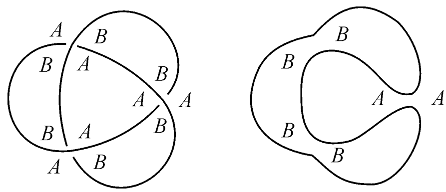


图 4 三叶结的一个 state

Fig. 4 One state of trefoil

2 定理的证明

证明 因 $L=L(K_1,K_2,\cdots,K_n)$ 是定向的有 n 个分支的链环，当改变 K_1 的定向时，在固定投影的条件下，每个交叉相关的区域 A，B 没有发生变化，根据引理，$<L_1>=<L>$，因

$$w(L_1)=2\lambda_{11}-\sum_{j=2}^{n}2\lambda_{1j}+\sum_{2\leqslant i,j\leqslant n}2\lambda_{ij}=-4\sum_{j=2}^{n}\lambda_{1j}+w(L),$$

故由式(1)，有

$$V(L_1)=(-A^3)^{-w(L_1)}<L_1>|_{A=t^{-1/4}}=(-A^3)^{4\sum\limits_{j=2}^{n}\lambda_{1j}-w(L)}<L>|_{A=t^{-1/4}}=t^{-3\sum\limits_{j=2}^{n}\lambda_{1j}}V(L)。$$

利用此结果，也有

$$V(L_2)=t^{-3(-\lambda_{12}+\sum\limits_{j=3}^{n}\lambda_{2j})}V(L_1)=t^{-3(-\lambda_{12}+\sum\limits_{j=2}^{n}\lambda_{1j}+\sum\limits_{j=3}^{n}\lambda_{2j})}V(L)=t^{-3(\sum\limits_{j=3}^{n}\lambda_{1j}+\sum\limits_{j=3}^{n}\lambda_{2j})}V(L),$$

同理，

$$V(L_3)=t^{3(-\lambda_{13}-\lambda_{23}+\sum\limits_{j=4}^{n}\lambda_{3j})}V(L_2)=t^{-3(\sum\limits_{j=3}^{n}\lambda_{2j}+\sum\limits_{j=3}^{n}\lambda_{1j}-\lambda_{13}-\lambda_{23}+\sum\limits_{j=4}^{n}\lambda_{3j})}V(L)=t^{-3(\sum\limits_{j=4}^{n}\lambda_{1j}+\sum\limits_{j=4}^{n}\lambda_{2j}+\sum\limits_{j=4}^{n}\lambda_{3j})}V(L),\cdots\cdots,$$

$$V(L_k)=t^{-3\sum\limits_{i=1}^{k}\sum\limits_{j=k+1}^{n}\lambda_{ij}}V(L),\ (k<n),$$

若 $k=n$，则 $V(L_n)=t^{-3(-\lambda_{1n}-\lambda_{2n}-\cdots-\lambda_{n-1,n})}V(L_{n-1})=t^{-3(-\lambda_{1n}-\lambda_{2n}-\cdots-\lambda_{n-1,n})}t^{-3\sum\limits_{i=1}^{n-1}\lambda_{in}}V(L)=V(L)$

参考文献：

[1] LICKORISH W B R, MILLETT K C. The reversing result for the Jones polynomial[J]. Pacific Journal of mathematics, 1986, 124(1): 173-176.

[2] KAUFFMAN L H. State models and the Jones polynomial[J]. Topology, 1987, 26(3): 395-407.

[3] ADAMS C C. The Knot Book: An Elementary Introduction to the Mathematical Theory of Knots[M]. Providence, Rhode Island: American Mathematical Society, 2004.

[4] KAWAUCHI A. A Survey of Knot Theory[M]. Basel, Boston, Berlin: Birkhäuser, 1996.

[5] BAR-NATAN D. The Rolfsen Knot Table[EB/OL]. [2010-12-12]. http://katlas.math.toronto.edu/wiki/The_Rolfsen_Knot_Table.