浙江科技学院学报，第24卷第1期，2012年2月
Journal of Zhejiang University of Science and Technology
Vol. 24 No. 1, Feb. 2012

DOI：10.3969/j.issn.1671-8798.2012.01.001

Vasicek 模型下的分数布朗运动模型的欧式期权定价

闫传鹏
（浙江科技学院 理学院，杭州 310023）

摘　要：在 Vasicek 模型下，利用 Δ-对冲和资产价格服从分数布朗运动（FBM）的逼近过程的方法，获得了欧式期权定价模型，并得到了其解析式，改进了经典的 Black-Scholes 公式。

关键词：分数布朗运动；零息债券；随机利率；期权定价

中图分类号：O211.63；F224.7　　**文献标志码**：A　　**文章编号**：1671-8798(2012)01-0001-05

European options pricing of FBM based on Vasicek model

YAN Chuan-peng
(School of Sciences, Zhejiang University of Science and Technology, Hangzhou 310023, China)

Abstract: European options pricing model is obtained under Vasicek model by using the methods of Δ-hedging and approximation process of assets price which is driven by fractional Brownian motion(FBM), and the close formula is also given. As a result, the classical Black-Scholes formula is improved.

Key words: fractional Brownian motion; zero coupon bonds; stochastic interest rate; option pricing

期权定价是金融数学研究的一个核心课题。自 Black，Scholes 和 Merton 于 1973 年给出期权的定价公式以来，金融衍生品的定价理论有了很大的发展。但在实际的金融市场中发现，标的资产价格过程具有长期依赖性和自相似性。近年来，分数 Black-Scholes 模型作为对古典的 Black-Scholes 模型的改进被提出来[1-3]，并利用 Wick 积建立了相关的随机积分。但是，由于分数布朗运动（fractional Brownian motion，FBM）不具有鞅性，这样的市场存在无风险套利的机会，所以市场不再是完备的。T. H. Thao 在 2006 年给出了分数 Black-Scholes 模型的一种逼近方法[4]。在文献[4]的方法下，P. Sattayatham 等[5]给出了带跳的分数布朗运动下股票的价格，T. H. Thao[6]得出了波动率是随机且由 GARCH(1,1)给出的股票价格模

收稿日期：2011-08-22

作者简介：闫传鹏(1975—　)，男，河南省商丘人，讲师，硕士，主要从事小波分析理论及金融数学研究。

型，梅正阳等[7]给出了利率为常数时欧式期权的定价公式。

1 Vasicek 模型及分数布朗运动

在经典的 B-S 公式中，利率是一个常数。在金融市场中，利率是其变化的一个最基本的因素，具有在均值水平上下摆动的趋势，即均值回复。本研究考虑最简单的随机利率模型——Vasicek 模型：

$$\mathrm{d}r_t = \beta(\gamma - r_t)\mathrm{d}t + \sigma_1 \mathrm{d}W_t$$

其中 β,γ,σ_1 为非负常数，W_t 为标准布朗运动。

分数布朗运动是一个 Gaussian 过程 $B^H = \{B_t^H : 0 \leqslant t \leqslant T\}$，其中 $H \in (0,1)$ 为 Hurst 指数，数学期望和协方差分别满足

$$E[B_t^H] = 0 \tag{1}$$

和

$$R_H(s,t) = \frac{1}{2}(|t|^{2H} + |s|^{2H} - |t-s|^{2H}),\quad s,t \in [0,T] \tag{2}$$

当 $H = \frac{1}{2}$ 时，则 B_t^H 就是标准的布朗运动 W_t；当 $\frac{1}{2} < H < 1$ 时，则 B_t^H 具有长期依赖性。而且 B_t^H 具有如下形式：

$$B_t^H = \frac{1}{\Gamma(1+\alpha)}\left\{\int_{-\infty}^{0}[(t-s)^\alpha - (-s)^\alpha]\mathrm{d}W_s + \int_0^t (t-s)^\alpha \mathrm{d}W_s\right\}$$

其中 $\alpha = H - \frac{1}{2}$，$\frac{1}{2} < H < 1$。记 $B_t = \int_0^t (t-s)^\alpha \mathrm{d}W_s$，在分数随机积分中用 B_t 代替 B_t^H，则分数 Black-Scholes 模型有如下形式：

$$\mathrm{d}S_t = \mu S_t \mathrm{d}t + \sigma S_t \mathrm{d}B_t, 0 \leqslant t \leqslant T \tag{3}$$

$$S(0) = S_0 \tag{4}$$

其中 S_t 为股票价格，μ,σ 为常数。

由于 B_t 不是半鞅，T. H. Thao 给出了如下一种逼近形式：

$$B_t^\varepsilon = \int_0^t (t-s+\varepsilon)^\alpha \mathrm{d}W_s,$$

并且满足

$$B_t^\varepsilon = \alpha\phi_t^\varepsilon + \varepsilon^\alpha B(t),\text{其中 } \phi_t^\varepsilon = \int_0^t (t-s+\varepsilon)^{\alpha-1}\mathrm{d}B(s) \tag{5}$$

2 零息债券

考虑两种可交易资产：股票和零息债券，股票服从如下随机微分方程：

$$\mathrm{d}S_t = r_t^\varepsilon S_t \mathrm{d}t + \sigma_2 S_t \mathrm{d}W_t \tag{6}$$

其中短期利率 r_t^ε 服从 Vasicek 模型：$\mathrm{d}r_t^\varepsilon = \beta(\gamma - r_t^\varepsilon)\mathrm{d}t + \sigma_1 \mathrm{d}B_t^\varepsilon$。

首先给出在随机利率下零息债券 $P(t,T)$ 的价格。当 r_t 是确定函数时，零息债券的价值满足：

$$\begin{cases}\mathrm{d}P = r_t P(t)\mathrm{d}t & 0 \leqslant t \leqslant T \\ P(T) = 1\end{cases}$$

显然，$P(t,T) = \mathrm{e}^{-\int_t^T r(s)\mathrm{d}s}$；当 r_t 是随机过程时，$P(t,T) = P(t,r_t,T) = E(\mathrm{e}^{-\int_t^T r_s \mathrm{d}s} \mid r_t)$。

在利率的逼近过程 r_t^ε 下，由伊藤公式可知：

$$\mathrm{d}(\mathrm{e}^{-\int_0^t r_s^\varepsilon \mathrm{d}s}P(t,r_t^\varepsilon)) = -r_t^\varepsilon \mathrm{e}^{-\int_0^t r_s^\varepsilon \mathrm{d}s}P(t,r_t^\varepsilon)\mathrm{d}t + \mathrm{e}^{-\int_0^t r_s^\varepsilon \mathrm{d}s}\mathrm{d}P(t,r_t^\varepsilon) =$$

$$-r_t^{\varepsilon}\mathrm{e}^{-\int_0^t r_s^{\varepsilon}\mathrm{d}s}P(t,r_t^{\varepsilon})\mathrm{d}t+\mathrm{e}^{-\int_0^t r_s^{\varepsilon}\mathrm{d}s}\left[\frac{\partial P}{\partial t}+\beta(\gamma-r_t^{\varepsilon}+\phi_t^{\varepsilon})\frac{\partial P}{\partial r_t^{\varepsilon}}+\frac{1}{2}\sigma_3^2\frac{\partial^2 P}{\partial r_t^{\varepsilon 2}}\right]\mathrm{d}t+\sigma_3\frac{\partial P}{\partial r_t^{\varepsilon}}\mathrm{d}W_t=$$

$$\mathrm{e}^{-\int_0^t r_s^{\varepsilon}\mathrm{d}s}\left(-r_t^{\varepsilon}P(t,r_t^{\varepsilon})+\frac{\partial P}{\partial t}+\beta(\gamma-r_t^{\varepsilon}+\phi_t^{\varepsilon})\frac{\partial P}{\partial r_t^{\varepsilon}}+\frac{1}{2}\sigma_3^2\frac{\partial^2 P}{\partial r_t^{\varepsilon 2}}\right)\mathrm{d}t+\sigma_3\frac{\partial P}{\partial r_t^{\varepsilon}}\mathrm{d}W_t$$

其中 $\phi_t^{\varepsilon}=\dfrac{\alpha\sigma_1\phi_t^{\varepsilon}}{\beta}$，$\sigma_3=\sigma_1\varepsilon^{\alpha}$。

又因零息债券的贴现过程是一个鞅[8]，所以上式中只含有 $\mathrm{d}W_t$ 项。由此可得偏微分方程：

$$\frac{\partial P}{\partial t}+\beta(\gamma-r_t^{\varepsilon}+\phi_t^{\varepsilon})\frac{\partial P}{\partial r_t^{\varepsilon}}+\frac{1}{2}\sigma_3^2\frac{\partial^2 P}{\partial r_t^{\varepsilon 2}}=r_t^{\varepsilon}P \tag{7}$$

且满足终端条件：

$$P(r_t^{\varepsilon},T)=1。\tag{8}$$

易知定解问题式(7)和(8)有如下形式的显示解：

$$P(t,r_t^{\varepsilon};T)=A(t)\mathrm{e}^{-r_t^{\varepsilon}C(t)} \tag{9}$$

其中

$$A(t)=\mathrm{e}^{\frac{1}{\beta^2}\{C^2(t)-\beta^2[\gamma(T-t)+\int_t^T\phi_s^{\varepsilon}\mathrm{d}s]\}-\frac{\sigma_3^2}{2}(T-t)-\frac{\sigma_3^2}{4\beta}C^2(t)},C(t)=\frac{1}{\beta}(1-\mathrm{e}^{-\beta(T-t)})。$$

而且 $P(t,r_t^{\varepsilon},T)$ 满足如下随机微分方程：

$$\frac{\mathrm{d}P}{P}=r_t^{\varepsilon}\mathrm{d}t-\sigma_3 C(t)\mathrm{d}W_t$$

3　欧式看涨期权的定价

下面考虑欧式看涨期权的定价。

设 $V(S_t,r_t^{\varepsilon},t)$ 是其在 t 时刻的价格，K 是敲定价格，在到期日 $V_T=(S_T-K)^+$。利用 Δ- 对冲原理导出 V_t 满足的 PDE。

考虑投资组合(S_t,P_t)，其 t 时刻的价值为：

$$\Pi_t=V_t-\Delta_{1t}S_t-\Delta_{2t}P_t$$

其中 Δ_{1t}，Δ_{2t} 分别为所持股票和零息债券的多头，使 Π_t 在时间段$[t,t+\mathrm{d}t]$内无风险，即

$$\mathrm{d}\Pi_t=r_t^{\varepsilon}\Pi_t\mathrm{d}t。\tag{10}$$

由伊藤公式知：

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\Pi_t=&\left(\frac{\partial V}{\partial t}+\frac{1}{2}\sigma_2^2S^2\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}+\frac{1}{2}\sigma_3^2\frac{\partial^2 V}{\partial r_t^{\varepsilon 2}}\right)\mathrm{d}t+\left(\frac{\partial V}{\partial S}-\Delta_{1t}\right)\mathrm{d}S_t+\\&\left(\frac{\partial V}{\partial r_t^{\varepsilon}}-\Delta_{2t}\frac{\partial P}{\partial r_t^{\varepsilon}}\right)\mathrm{d}r_t^{\varepsilon}-\Delta_{2t}\left(\frac{\partial P}{\partial t}+\frac{1}{2}\sigma_3^2\frac{\partial^2 P}{\partial r_t^{\varepsilon 2}}\right)\mathrm{d}t\end{aligned}\tag{11}$$

为了消除风险，取 $\Delta_{1t}=\dfrac{\partial V}{\partial S}$，$\Delta_{2t}=\dfrac{\partial V}{\partial r_t^{\varepsilon}}\Big/\dfrac{\partial P}{\partial r_t^{\varepsilon}}$。把式(7)和(11)代入式(10)，得到

$$\frac{\partial V}{\partial t}+\frac{1}{2}\sigma_2^2S^2\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}+\frac{1}{2}\sigma_3^2\frac{\partial^2 V}{\partial r_t^{\varepsilon 2}}+r_t^{\varepsilon}S\frac{\partial V}{\partial S}+\beta(\gamma-r_t^{\varepsilon}+\phi_t^{\varepsilon})\frac{\partial V}{\partial r_t^{\varepsilon}}=r_t^{\varepsilon}V \tag{12}$$

并满足终值条件 $V(S,r_t^{\varepsilon},T)=(S_T-K)^+$。

注：当 r 为常数时，式(12)则为$\dfrac{\partial V}{\partial t}+\dfrac{1}{2}\sigma_2^2S^2\dfrac{\partial^2 V}{\partial S^2}+rS\dfrac{\partial V}{\partial S}=rV$，即可得到经典的 Black-Scholes 随机微分方程。

定理　$V(S_t,r_t^{\varepsilon},t)$ 是欧式看涨期权在 t 时刻的价格，则

$$V(S_t,r_t^{\varepsilon},t)=SN(d_1^*)-KPN(d_2^*)$$

其中

$$d_1^* = \frac{\ln\frac{S}{K} - \ln P + \frac{1}{2}\int_t^T \sigma^2(s)\mathrm{d}s}{\sqrt{\int_t^T \sigma^2(s)\mathrm{d}s}}, d_2^* = d_1^* - \sqrt{\int_t^T \sigma^2(s)\mathrm{d}s}$$

$$\sigma = \sqrt{\sigma_2^2 + \sigma_3^2 C^2(t)}, \sigma_3 = \sigma_1 \varepsilon^\alpha, \alpha = H - \frac{1}{2}, \frac{1}{2} < H < 1。$$

证明 把零息债券 $P(t,T)$ 作为新的计价单位，作如下变换：

$$y = \frac{S}{P}, \hat{V} = \frac{V}{P}$$

经计算得：

$$\frac{\partial V}{\partial t} = \hat{V}\frac{\partial P}{\partial t} + P\frac{\partial \hat{V}}{\partial t} - y\frac{\partial \hat{V}}{\partial y}\frac{\partial P}{\partial t}$$

$$\frac{\partial V}{\partial r_t^\varepsilon} = \hat{V}\frac{\partial P}{\partial r_t^\varepsilon} - y\frac{\partial \hat{V}}{\partial y}\frac{\partial P}{\partial r_t^\varepsilon}$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial r_t^{\varepsilon 2}} = \frac{\partial^2 P}{\partial r_t^{\varepsilon 2}} - y\frac{\partial \hat{V}}{\partial y}\frac{\partial^2 P}{\partial r_t^{\varepsilon 2}} + y^2\frac{\partial^2 \hat{V}}{\partial y^2}\frac{1}{P}\left(\frac{\partial P}{\partial r_t^\varepsilon}\right)^2$$

$$\frac{\partial V}{\partial S} = \frac{1}{P}\frac{\partial \hat{V}}{\partial y}$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial S^2} = \frac{1}{P^2}\frac{\partial^2 \hat{V}}{\partial y^2}$$

代入式(12)，得

$$\frac{\partial \hat{V}}{\partial t} + \frac{1}{2}\left[\sigma_2^2\frac{S^2}{P^2} + \frac{1}{2}\sigma_3^2 y^2\left(\frac{1}{P}\frac{\partial P}{\partial r_t^\varepsilon}\right)^2\right]\frac{\partial^2 \hat{V}}{\partial y^2} +$$

$$\frac{1}{P}\left[\frac{\partial P}{\partial t} + \frac{\sigma_3^2}{2}\frac{\partial^2 P}{\partial r_t^{\varepsilon 2}} + \beta(\gamma - r_t^\varepsilon + \phi_t^\varepsilon)\frac{\partial P}{\partial r_t^\varepsilon} - r_t^\varepsilon\frac{S}{y}\right]y\frac{\partial \hat{V}}{\partial y} +$$

$$\frac{1}{P}\left[\frac{\partial P}{\partial t} + \frac{\sigma_3^2}{2}\frac{\partial^2 P}{\partial r_t^{\varepsilon 2}} + \beta(\gamma - r_t^\varepsilon + \phi_t^\varepsilon)\frac{\partial P}{\partial r_t^\varepsilon} - r_t^\varepsilon P\right]\hat{V} = 0$$

由 $y = \frac{S}{P}$ 和式(7)可得 $\hat{V}$ 满足如下 PDE：

$$\frac{\partial \hat{V}}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 y^2\frac{\partial^2 \hat{V}}{\partial y^2} = 0$$

其中 $\sigma^2 = \sigma_1^2 + \sigma_3^2 C^2(t)$ 且有终值条件 $\hat{V}(y,T) = (y - K)^+$。由此可得

$$\hat{V}(y,t) = yN(d_1) - KN(d_2)$$

其中

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S}{K}\right) + \frac{1}{2}\int_t^T \sigma^2(s)\mathrm{d}s}{\sqrt{\int_t^T \sigma^2(s)\mathrm{d}s}}, d_2 = d_1 - \sqrt{\int_t^T \sigma^2(s)\mathrm{d}s}。$$

从而

$$V(y,t) = P\hat{V} = SN(d_1^*) - KPN(d_2^*)$$

其中

$$d_1^* = \frac{\ln\left(\frac{S}{K}\right) - \ln P + \frac{1}{2}\int_t^T \sigma^2(s)\mathrm{d}s}{\sqrt{\int_t^T \sigma^2(s)\mathrm{d}s}}, d_2^* = d_1^* - \sqrt{\int_t^T \sigma^2(s)\mathrm{d}s}。$$

证毕。

注:1) 当 $\varepsilon \to 0$,即为经典的 Black-Scholes 欧式看涨期权定价公式;

2) 由 Call 和 Put 的平价关系,可类似得到欧式看跌期权价格的公式。

参考文献:

[1] Elliot R J, Van Der Hoek J. A general fractional white noise theory and applications to finance[J]. Math Finance, 2003,13(2):301-330.

[2] Hu Y, Oksendal B. Fractional white noise calculus and applications to finance[J]. Infin Dimens Anal Quantum Probab and Relat Top,2003,6:1-32.

[3] Bjöork T, Hult H. A note on wick products and the fractional Black-Scholes model[J]. Mathematics to Fiance,2005, 9(2):197-209.

[4] Thao T H. An approxiamte approach to fractional analysis for Finance[J]. J Nonlinear Analysis: Real Word Applications,2006,7:124-132.

[5] Sattayatham P, Intrarasit A, Chaiyasena A P. A fractional Black-Scholes model with jump[J]. Vintnam of Journal Mathematics,2007,35(3):1-15.

[6] Thao T H. Fractional integrated GARCH diffusion limit models[J]. Journal of the Korean Statistical Society,2009, 38:231-238.

[7] 梅正阳,杨玉孔.基于鞅方法的分数 Brownian 运动模型的期权定价[J].应用数学,2008,21(4):727-730.

[8] Privault N.随机利率模型及相关衍生品定价[M].韦晓,译.南京:南京大学出版社,2010.