浙江科技学院学报，第 24 卷第 1 期，2012 年 2 月
Journal of Zhejiang University of Science and Technology
Vol. 24 No. 1，Feb. 2012

DOI：10.3969/j.issn.1671-8798.2012.01.014

HPM 视角下的高等数学教学

周小燕[a]，胡丰华[b]
（浙江科技学院 a.理学院；b.建筑工程学院，杭州 310023）

摘　要： 介绍了 HPM 及 HPM 研究的目的和关注的内容，讲述了高等数学的重要性及其教学的现状，阐述了数学史与高等数学教学整合的必要性。通过悖论、数学家的故事、历史上数学家的错误及数学思想方法的产生等 4 个实例，探讨了 HPM 视角下的高等数学教学。

关键词： HPM；数学史；高等数学
中图分类号： G642.0；O13　　**文献标志码：** A　　**文章编号：** 1671-8798(2012)01-0064-05

Advanced mathematics teaching in view of HPM

ZHOU Xiao-yan[a], HU Feng-hua[b]
(a. School of Sciences; b. School of Architeture and Civil Engineering, Zhejiang University of Science and Technology, Hangzhou 310023, China)

Abstract: HPM and its purpose and content are presented as well as the importance of advanced mathematics and its teaching status. Then the necessary of integration with history of mathematics and advanced mathematics teaching are stated. The teaching of advanced mathematics is explored through paradox, the story of the mathematicians, the mistakes of mathematicians in history and the generation of mathematical way of thinking in view of HPM.

Key words: HPM; history of mathematics; advanced mathematics

国际上把对数学史与数学教育关系的研究称为“History and pedagogy of mathematics”（以下简称 HPM）。HPM 研究组织正式成立 30 年以来，其理论及实践研究得到了长足的发展。但是，综观国际 HPM 研究的现状，相对于丰富的 HPM 理论研究，其课堂实践方面的研究还比较薄弱。目前，高等数学的教学现状也不容乐观，学生缺乏创造能力。为此，笔者研究了 HPM 角度下的高等数学课堂教学，旨在通过整合数学史与高等数学教学来激发学生学习的兴趣，以提高学生的学习质量，培养学生的人文素养。

收稿日期： 2011-03-14
作者简介： 周小燕（1976—　），女，浙江省萧山人，讲师，硕士，主要从事偏微分方程及数学教育研究。

1　HPM 介绍

HPM 源自于 1972 年在英国召开的第二届国际数学教育大会上的一个工作组，通常也把这个研究领域本身称为 HPM。HPM 研究的目标是通过对数学历史的运用，提高数学教育的水平，关注的内容包括：数学与其他学科的关系、多元文化的教学、数学史与学生的认知发展、数学史与发生教学法、数学史与学生的困难、数学原始文献在教学中的应用。

2　高等数学教学的现状

高等数学是理工科大学中一门重要的基础课程，它有着广泛的应用性，并和学生后继专业课程的学习关系密切。但是，高等数学教学内容多、学时少，学生学习高等数学面临许多困难：概念抽象（如极限概念），严格的形式化表述（如极限的 ε-δ 定义），较高的计算技巧性（如不定积分的计算）等。大部分学生不能很好地掌握高等数学的基本概念、基本结论和基本方法，只会简单地按具体公式计算或套用固定步骤解题。上述现象固然有学生主观的因素，但关键还是在于数学教材的编写与传统的教学方式。高等数学的内容在 17、18 世纪已形成，这些数学教材是在科学性与教育要求相结合的原则指导下经过反复删减编写而成的。它舍弃了许多数学概念和方法形成的实际背景、知识背景、演化历程及导致其演化的各种因素，因此仅凭数学教材的学习，难以获得数学的原貌和全景，同时忽视了那些被历史淘汰掉的但对现实科学或许有用的数学材料与方法。另外，中国传统的数学教学强调的是数学的技能和逻辑推理，学生要求掌握一大堆的概念、定理，以及反反复复的习题演算，而对于数学概念在历史上的产生过程，数学定理或公式的发现过程则并不提及。小学中学如此，到了大学也仍然没有改变，所以学生甚至大部分教师都认为数学是单调的，数学是枯燥的。事实上，数学的这些技巧只不过是它的一方面，它们远不能代表数学，技巧是将数学的激情、推理、美和深刻的内涵剥落后的产物。

3　数学史与高等数学教学整合的必要性

数学的历史源远流长，在早期的人类社会中，数学与语言、艺术及宗教一并构成了最早的人类文明。数学已经具有两千多年的历史，数学史是研究数学发展规律的科学，它研究数学概念、数学方法和数学思想的起源与发展。数学史研究具有三重目的：一是历史目的，即恢复历史的本来面目；二是数学的目的，即古为今用，为现实的数学研究与自主创新提供历史借鉴；三是教育的目的，即在数学教学中利用数学史，这在当前已经成为一种国际现象[1]。而数学史教育是教师在讲授数学知识的同时，以实证的方式，向学生详细追溯这一知识或概念被人们所发现和完善的全部历史过程，并向学生指明在发展道路上出现的各种各样的困难，以及数学家们怎样战胜或避开它们，最后又怎样走近那个从未达到过的目标。过去的那种英才教育、专才教育的教育思想，已经不能适应当今社会的需要，素质教育、通识教育才是首要，而数学史在推进素质教育方面，显然有着它的特殊作用[2]。数学史的教育应该至少包含三方面的目的：一是使学生更好地理解数学，二是激发学生学习数学的兴趣，三是培养学生的人文素养。

4　实例研究

4.1　悖　论

所谓数学悖论，是指数学领域中既有数学规范中发生的无法解决的认识矛盾，这种认识矛盾可以在新的数学规范中得到解决。人类历史上有 4 次数学高峰：第一次是古希腊的演绎数学时期，第二次是牛顿、莱布尼兹的微积分时期，第三次是以希尔伯特为代表的形式主义公理化时期，第四次是以计算机技术为标志的新数学时期。数学历史上的三大危机分别是由古希腊时期的希帕索斯悖论，17、18 世纪关于微积分基础争论的贝克莱悖论和 20 世纪初的集合论悖论引起的，它同前 3 次高峰有着密切的联系，这种联系是

数学作为一门追求完美的科学的必然。

在高等数学教学刚开始时，通过给学生介绍由数学悖论引起的数学危机，使学生知道数学是一门充满矛盾并不断发展的学科，而不是一成不变的就像人们现在看到的完美的形式体系那样。笔者给学生介绍的是贝克莱悖论。

17世纪末，为了满足工业革命的需要，牛顿和莱布尼兹创立微积分理论，并成功地应用到了实践中，大部分数学家对于这一理论的可靠性深信不移。但是，两人的理论都建立在无穷小分析之上，他们对作为基本概念的无穷小量的理解与运用是混乱的，无穷小分析后来证明是包含逻辑矛盾的。1734年，英国大主教贝克莱对当时的微积分学说进行了猛烈的抨击，例如他指责牛顿，为计算 x^2 的导数，先将 x 取一个不为0的增量 Δx，由 $(x+\Delta x)^2-x^2$，得到 $2x\Delta x+(\Delta x)^2$ 后再被 Δx 除，得到 $2x+\Delta x$，最后突然令 $\Delta x=0$，求得导数为 $2x$，这是依靠双重错误得到了不科学却正确的结果。无穷小量在牛顿的理论中一会儿说是0，一会儿又说不是0。数学史上把贝克莱的问题称之为“贝克莱悖论”。就无穷小量在当时实际应用而言，它必须既是0，又不是0，但从形式逻辑而言，这无疑是一个矛盾。这一悖论的发现，在当时引起了一定的思想混乱，导致了数学史上的第二次危机，引起了持续200多年的微积分基础理论的争论。随后，许多数学家从各种不同的角度进行研究、探索，试图把微积分重新建立在可靠的基础之上。经过几代数学家的努力，包括达朗贝尔、拉格朗日、伯努利家族、拉普拉斯及欧拉、柯西、魏尔斯特拉斯、戴德金、康托尔在内，最后终将分析基础归结为实数理论，并于20世纪70年代构建了完整的实数体系，建立起严谨的极限理论与实数理论，完成了分析学的逻辑奠基工作。微积分学坚实牢固基础的建立，结束了数学中暂时的混乱局面，同时也宣布了第二次数学危机的彻底解决。

给学生介绍这样的数学悖论，可以让学生明白悖论是数学发展的一种内在动力，也能激发学生更有兴趣去了解第一次数学危机和第三次数学危机，从而能对整个数学的发展有个大致的了解。

4.2 数学理想方法的产生

在数学发展史上，数学家往往是在问题的解决过程中产生新的思想方法，甚至是一门学科。在课堂上和学生一起追寻数学方法的源头，从数学发现的本原状态中理解方法论的本质，有助于加深学生对教学内容的理解。

在空间解析几何这一章开始时，笔者在课堂上给学生讲述了解析几何这一学科其实也是一种思想方法的诞生。

笛卡尔是法国著名的哲学家、自然科学家和数学家。笛卡尔从小身体瘦弱，但他极其聪敏，他8岁进入耶稣会学校接受传统的文化教育，但在他看来教科书中那些微妙的论证，其实不过是模棱两可甚至前后矛盾的理论，只能使他顿生怀疑而无从得到确凿的知识。他只喜欢数学教师克拉维斯的代数课，但很快又察觉到代数课中的一些内容缺乏直观性，同时他也不喜欢欧几里得几何，觉得它缺乏动感和想象力，他立志要建立一种集代数和几何两门学科优点于一身而又能去掉二者缺点的新学科。1619年，笛卡尔研究“帕波斯问题”时，引发了他建立坐标系，且把几何问题转化成代数方程的思想，这个问题是引发解析几何诞生的重要契机之一。1637年，笛卡尔的名著《几何学》问世，宣布解析几何的诞生，解析几何的产生标志着数学从初等数学时期进入高等数学时期。《几何学》是笛卡尔著名《方法论》的3个附录之一，约100页，分为3卷。在《几何学》的一开始他就提出：“任何一个几何问题都很容易化归为用一些术语来表示，使得只要知道直线段的长度的有关知识，就足以完成它的作图。”笛卡尔的数学格言是：“一切问题都可以化成数学问题，一切数学问题可以化成代数问题，一切代数问题可以化成代数方程求解的问题。”

另外值得一提的是，法国另一位数学家费马从另一个出发点独立地进行了解析几何的初创工作，他主要是从不定方程解的作图这一角度开展工作的，也是继承阿波罗尼奥斯和帕波斯的工作之后，提出了解析几何的理论和方法的[3]。

解析几何的出现，改变了自古希腊以来代数和几何分离的趋向，把“数”与“形”统一了起来，使几何曲线与代数方程相结合。解析几何的建立为微积分的创立奠定了基础，从而开拓了变量数学的广阔领域。正如恩格斯所说：“数学中的转折点是笛卡尔的变数。有了变数，运动进入了数学，有了变数，辩证法进入了数学，有了变数，微分和积分也就立刻成为必要了。”

4.3　数学家的故事

伊夫斯曾说过：“在课堂上证明这些故事和轶事是非常有用的，就像少量激发兴趣的因子、调味品一样，通过介绍一个人的成长故事来激励学生，慢慢灌输对伟大创造者的尊敬和仰慕，找回对数学学科逐渐衰退的兴趣，与历史文化逐步建立联系。”数学家们所经受的痛苦和斗争，所表现出的坚韧不拔，如果学生们知道这些事情更多一些，将会以更大的勇气和热忱去学习和工作。在高等数学微积分部分的教学过程中，笔者给学生介绍了 18 世纪著名的伯努利家族。

伯努利家族是瑞士巴塞尔的一个家族，这个家族出现了很多艺术家和科学家，特别是 18 世纪，家族 3 代出了 8 位著名的数学家，他们分别是雅各布和约翰兄弟、他们的侄子大尼古拉、约翰的 3 个儿子和2 个孙子，当今有 6 个数学方程、定理和函数都以伯努利命名[4]。8 位数学家中最出名的是雅各布、约翰及其子丹尼尔，其中雅各布和约翰是最早认识微积分的惊人力量并将其应用于各类问题的数学家。

雅各布于 1671 和 1676 年获得艺术硕士和神学硕士学位，但他对数学有着浓厚的兴趣，他与莱布尼茨(微积分的创始人之一)一直保持经常的通讯联系，互相探讨微积分的有关问题。1687 年雅各布担任巴塞尔大学数学教授，教授实验物理和数学。雅各布在概率论、微分方程、无穷级数求和、变分方法、解析几何等方面均有较大的成就。雅各布的数学贡献包括：极坐标的应用、在直角坐标下和极坐标下导出平面曲线的曲率半径公式、伯努利双纽线、伯努利微分方程、等周曲线问题、伯努利数、伯努利大数定理等。雅各布发现对数螺线($r=a^{\theta}$)以奇异的方式在渐开线、渐屈线和反射与折射的焦散中重复其自身，他追随阿基米德，表示希望将这种曲线刻在自己的墓碑上，并刻写“Eadem mutate resurgo”(纵然变化，我重生如故)，这是一个表达基督希望的典故[5]。

约翰是雅各布的弟弟，1695 年约翰担任荷兰格罗宁根大学数学教授。1705 年雅各布去世，约翰去巴塞尔大学继任数学教授的职务，致力于数学教学，直到 1748 年去世。约翰是一位多产的数学家，他的数学贡献包括：曲线的求长、曲面的求积、等周问题、微分方程、指数运算、解决悬链线问题、提出洛必塔法则、给出求积分的变量替换法、出版《积分学数学讲义》等。约翰的另一大功绩是培养了一大批出色的数学家，其中包括 18 世纪最著名的数学家欧拉、瑞士数学家克莱姆、法国数学家洛必塔，以及他自己的儿子丹尼尔和侄子尼古拉等。

丹尼尔是约翰的次子，1724 年，他发表《数学练习》，引起学术界关注，第二年，25 岁的丹尼尔受聘为圣彼得堡科学院数学教授，并被选为该院名誉院士。丹尼尔的贡献集中在微分方程、概率和数学物理，被誉之为数学物理方程的开拓者和奠基人。作为伯努利家族博学广识的代表，他的成就涉及多个科学领域。他出版了经典著作《流体动力学》、给出伯努利定理等流体动力学的基础理论、研究弹性弦的横向振动问题、提出声音在空气中的传播规律。他的论著还涉及天文学、地球引力、潮汐、磁学、振动理论、船体航行的稳定、生理学等。有一个关于丹尼尔的传说：有一次他在旅途中同一个陌生人闲谈，他谦虚地自我介绍：“我是丹尼尔·伯努利。”陌生人立即带着讥讽的神情回答道：“那我就是伊萨克·牛顿。”在丹尼尔看来，这是他有生以来受到过的最诚恳的赞颂。

4.4　历史上数学家的错误

在数学理想的形成和发展过程中，数学家们也会犯错误，通过揭示历史上数学家的错误来加深学生对课堂知识的理解，也不失为一种非常好的教学手段。

在介绍无穷级数时，笔者给学生讲了这样一个故事。数学对无限的分类产生于 17 世纪和 18 世纪之

间，当时由于对微积分的研究，数学中出现了大量的无穷级数，最初人们还没有认识到无穷级数的特殊性质，只把它们看作无限多个项的和，于是就轻率地把有理运算的性质应用到无穷级数，结果产生了许多奇异的答案。例如，牧师格兰迪考虑了交错级数：

$$1-1+1-1+1-1+\cdots,$$

它的和应该是多少呢？

第一种方法，$S=(1-1)+(1-1)+(1-1)+\cdots=0+0+0+\cdots=0$；

第二种方法，$S=1-(1-1)-(1-1)-(1-1)-\cdots=1$。

面对这 2 种可能，因为 0 和 1 都是同样可能的结果，所以正确的级数和为$\frac{1}{2}$。当然这个值也可以这样计算：

$$S=1-(1-1+1-1+1-1+\cdots)=1-S,$$

所以，$2S=1$，即 $S=\frac{1}{2}$。他甚至还打比方说，一个父亲把一颗宝石传给 2 个儿子，条件是他们每人保存 1 年，因此它属于每个儿子的时间都是一半。为了消除这些荒谬的结果，数学家们最终发现了无穷级数的特殊性质：收敛性和发散性。只有那些收敛的级数才是可以确定的，人们可以运用有限的数学方法求出它的和，而发散的级数是不可确定的，它使一切数学方法失效。讲到这里，学生就很容易明白，这个交错级数其实是一个发散级数，根本就不存在和。

5 结 语

把数学史融入到高等数学的课堂教学中，一方面加强了数学人文教育，另外一方面，使学生觉得高等数学教学课堂不再枯燥无味，激发了他们学习的兴趣，能使学生更好地掌握教学内容，进而为他们后继的专业课程打好基础。

参考文献：

[1] 江晓原，谢宝耿．从科学史到科学文化：江晓原教授访谈[J]．学术月刊，2004(12)：111-121.

[2] 李文林．数学的进化：东西方数学史比较研究[M]．北京：科学出版社，2005.

[3] 王树禾．数学思想史[M]．北京：国防工业出版社，2003.

[4] 哈尔·赫尔曼．数学恩仇录[M]．范伟，译．上海：复旦大学出版社，2009.

[5] EVES H W．数学圈[M]．李泳，刘晶晶，译．长沙：湖南科学技术出版社，2007.