浙江科技学院学报，第 24 卷第 3 期，2012 年 6 月
Journal of Zhejiang University of Science and Technology
Vol. 24 No. 3，Jun. 2012

DOI：10.3969/j. issn. 1671-8798. 2012. 03. 001

平面第二类曲线积分的一种简便计算方法

李小梅
（浙江科技学院 理学院，杭州 310023）

摘　要：第二类曲线积分的计算在微积分学中是一个难点，其中概念既多又抽象，计算既繁又难以判断；而在研究生入学考试的命题中，曲线积分的出题率却又非常高，同时又伴随着题目难度大、解题正确率低的现象。但是，若将格林公式进行转化，就可得到平面第二类曲线积分计算的一种简便方法。它无需更多的判别就可直接进行计算，给正确理解、准确计算平面第二类曲线积分提供了一种思路。

关键词：第二类曲线积分；连通区域；一阶连续偏导数；正向曲线；格林公式
中图分类号：O172.2　　　**文献标志码**：A　　　**文章编号**：1671-8798(2012)03-0185-05

Simple and convinient calculating method of integral curve of second category

LI Xiao-mei
（School of Sciences，Zhejiang University of Science and Technology，Hangzhou 310023，China）

Abstract：The second type of curve integral is a hard nut to crack in the calculus. It is often associated with abstract concepts，difficult calculations and judgements. But in the national entrance examination for postgraduate，this kind of difficult calculation often appears and few students can gain the marks. A simple method to calculate the second type of curve integral is established by transforming the Green formula. By using this method，the students can calculate the curve integral directly instead of complex judgement. So this method offers another way to understand the curve integral of second category and solve the concerning problems correctly.

Key words：integral curve of the second category；regional connectivity；first-order consecutive partial derivatives；forward curve；Green formula

第二类曲线积分的计算在微积分学中是一个难点，其中概念既多又抽象，计算既繁又难以判断。如计算时须考虑积分曲线为开曲线或者是闭曲线时的状态，与积分路径有关或无关时的性态，被积函数的偏导是否在区域 D 内连续还是不连续的条件，曲线是否为正向还是反向时的确定等[1-3]，这些情况在计算第二类

收稿日期：2011-12-11
基金项目：浙江科技学院教学研究项目(2009ⅡB-a53)
作者简介：李小梅(1956—　)，女，黑龙江省宝清人，副教授，主要从事高等数学的教学及研究。

曲线积分都必须进行分析。而这些分析恰恰是曲线积分中难以掌握的，特别在研究生入学考试的命题中，曲线积分的出题率很高，而难度系数却又很大，直接导致了较低的解题正确率[4]。本文利用格林公式进行转化，推出了平面上第二类曲线积分计算的一种简便方法，它无需更多的判断就可直接进行计算。

1 准备知识与命题

设曲线 L 是平面上一条光滑的曲线弧，$P(x,y)$、$Q(x,y)$ 在曲线 L 上连续。则有：

引理 1.1（格林公式） 设闭区域 D 由分段光滑的曲线 L 围成，函数 $P(x,y)$ 及 $Q(x,y)$ 在 D 上具有一阶连续偏导数，则有

$$\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\oint_L P\,\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$$

其中 L 是 D 的取正向的边界曲线。

引理 1.2（曲线积分性质） 设 L 是有向曲线弧，$-L$ 是与 L 方向相反的有向曲线弧，则

$$\int_{-L}P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y=-\int_L P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y;$$

引理 1.3 设 L 为平行 X 轴的一条线段，$A(x_0,y_1)$ 为起点，$B(x_1,y_1)$ 为终点，则

$$\int_L P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y=\int_{x_0}^{x_1}P(x,y_1)\mathrm{d}x \tag{1}$$

同样，若 L 为平行 Y 轴的一条线段，$A(x_0,y_0)$ 为起点，$B(x_0,y_1)$ 为终点，则有：

$$\int_L P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y=\int_{y_0}^{y_1}Q(x_0,y)\mathrm{d}y \tag{2}$$

证明：略。

根据以上引理，本研究推出以下结论：

定理 1.1 设开区域 D 是一个单连通域，函数 $P(x,y)$ 及 $Q(x,y)$ 在 D 内具有一阶连续偏导数，则有：

$$\int_l P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y=-\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\int_{x_0}^{x_1}P(x,y_0)\mathrm{d}x+\int_{y_0}^{y_1}Q(x_1,y)\mathrm{d}y$$

其中曲线 l 是起点为 $A(x_0,y_0)$，终点为 $B(x_1,y_1)(x_0<x_1,y_0<y_1)$) 区域 D 内的一条开曲线。

定理 1.2 设闭区域 D 由分段光滑的曲线 L 围成，若 $O(0,0)\in D$，且函数 $P(x,y)$ 及 $Q(x,y)$ 在 D 上除 $O(0,0)$ 外具有一阶连续偏导数，则有：

$$\oint_L P\,\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y=\oint_l P\,\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y+\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y。$$

其中 L 是 D 的取正向的边界曲线；l 是以原点为圆心，半径为 r 取逆时针方向的边界曲线。

定理 1.3 设闭区域 D 由分段光滑的曲线 L 围成，且设 L 为封闭正向曲线 $\overset{\frown}{ABCA}$，函数 $P(x,y)$ 或 $Q(x,y)$ 在曲线 L 中点 B 的邻近无界（或称其点为 $P(x,y)$ 或 $Q(x,y)$ 的一个奇点）。如果对曲线 L 上除点 B 外的任意点处函数 $P(x,y)$ 及 $Q(x,y)$ 在 D 上均有一阶连续偏导数，则当积分 $\oint_L P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y$ 收敛时，有：

$$\oint_L=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\overset{\frown}{AB'}}+\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\overset{\frown}{B'C}}+\int_{\overset{\frown}{CA}}=\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

2 定理分析与证明

定理 1.1 证明 设开区域 D 是一个单连通域，函数 $P(x,y)$ 及 $Q(x,y)$ 在 D 内具有一阶连续偏导数。曲线 l 的起点为 $A(x_0,y_0)$，终点为 $B(x_1,y_1)$（A，B 为区域 D 内两点且 $x_0<x_1,y_0<y_1$），连接 AC，CB 构成封闭曲线 $L=l^-+AC+CB$（AC 平行 x 轴，CB 平行 y 轴；且 L 是 D 的取正向的边界曲线，如图 1 所示。

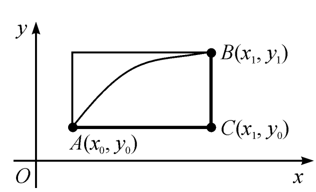

图 1 开曲线构成图

Fig. 1 Formation diagram of open curve

由**引理 1.1**:

$$\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\oint_L P\,\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y,$$

可得
$$\oint_L P\,\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y=\int_{l^-}+\int_{AC}+\int_{CB}=\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

则有:
$$\int_{l^-}P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y=\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\int_{AC}-\int_{CB}$$

由**引理 1.2**:

$$\int_l P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y=-\int_{l^-}=-\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\int_{AC}+\int_{CB}$$

所以根据**引理 1.3** 有:

$$\int_l P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y=-\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\int_{x_0}^{x_1}P(x,y_0)\mathrm{d}x+\int_{y_0}^{y_1}Q(x_1,y)\mathrm{d}y$$

特别是当 $x_0=x_1,y_0<y_1$ 时:

$$\int_l P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y=-\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\int_{y_0}^{y_1}Q(x_1,y)\mathrm{d}y$$

当$\dfrac{\partial Q}{\partial x}=\dfrac{\partial P}{\partial y}$(即曲线积分与路径无关)时:

$$\int_l P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y=\int_{x_0}^{x_1}P(x,y_0)\mathrm{d}x+\int_{y_0}^{y_1}Q(x_1,y)\mathrm{d}y$$

证毕。

定理 1.2 证明　设闭区域 D 由分段光滑曲线 L 围成,当$(0,0)\in D$ 时,作位于 D 内圆周 $l:x^2+y^2=r^2$,如图 2 所示。

记 D_1 由 L 和 l 所围成,应用格林公式,得

$$\oint_L P\,\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y-\oint_l P\,\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y=\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

所以:$\displaystyle\oint_L P\,\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y=\oint_l P\,\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y+\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

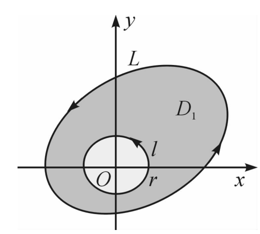

图 2　原点在闭曲线内

Fig. 2　Orignial point inside closed curve

证毕。

定理 1.3 证明　先给出定义:设 L 为一条光滑或分段光滑的封闭正向曲线$\overparen{ABCA}$,函数 $P(x,y)$ 或 $Q(x,y)$ 在曲线 L 中点 B 的邻近无界(或称其点为 $P(x,y)$ 或 $Q(x,y)$ 的一个奇点)。如果对曲线 L 上除点 B 外的任意点处函数 $P(x,y)$ 及 $Q(x,y)$ 在 D 上均有一阶连续偏导数,取 $B(b_1,b_2)$ 点邻近点 $B'(b_1+\varepsilon,b_2+\varepsilon)$ $\lim\limits_{\varepsilon\to0}\int_{\overparen{AB'}}$、$\lim\limits_{\varepsilon\to0}\int_{\overparen{B'C}}$ 均存在,且有:$\int_{\overparen{AB}}=\lim\limits_{\varepsilon\to0}\int_{\overparen{AB'}}$,$\int_{\overparen{BC}}=\lim\limits_{\varepsilon\to0}\int_{\overparen{B'C}}$,则称积分$\oint_L P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y$ 是收敛的;如果上述有一个极限不存在,则称积分是发散的。因此,当积分$\oint_L P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y$ 收敛时,显然有

$$\oint_L=\lim_{\varepsilon\to0}\int_{\overparen{AB'}}+\lim_{\varepsilon\to0}\int_{\overparen{B'C}}+\int_{\overparen{CA}}=\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y。$$

注:对于积分曲线为封闭曲线时,**定理 1.2、1.3** 分别讨论了封闭曲线 L 包含原点和经过原点 $O(0,0)$ 且函数 $P(x,y)$ 及 $Q(x,y)$ 仅在 $O(0,0)$ 处不连续(此时曲线积分就是文献[5]中所定义的无界函数广义第二类曲线积分)时的两种情况。至于函数 $P(x,y)$ 及 $Q(x,y)$ 在封闭曲线所围的闭域 D 上具有一阶连续的偏导数,则按格林公式做。

3　举　例

上面定理是分平面第二类曲线积分为开曲线还是闭曲线两种类型进行讨论的。因此,在应用上面定理时,首先考察曲线是开曲线还是闭曲线,再分别应用上述定理即可(以下例题均假设满足定理条件,题中不再说明)。

例 1：计算$\int_L (x^2+2xy)\mathrm{d}x+(x^2+y^4)\mathrm{d}y$，$L$ 为由点 $O(0,0)$ 到点 $B(1,1)$ 的曲线弧 $y=\sin\dfrac{\pi x}{2}$。

分析：按照平常方法计算有 1）参数法[1]，但较难；2）判断与路径无关，需考虑添加辅助线[6]。由于此曲线为开曲线，且起点 $O(0,0)$，终点 $B(1,1)$，其中 $x_0=0<x_1=1$；$y_0=0<y_1=1$，满足**定理 1.1** 的条件，直接用定理即可。

解：因为 $\dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{\partial}{\partial y}(x^2+2xy)=2x$，$\dfrac{\partial Q}{\partial x}=\dfrac{\partial}{\partial x}(x^2+y^4)=2x$

据**定理 1.1** 得到：原式 $=\int_0^1 x^2\mathrm{d}x+\int_0^1(1+y^4)\mathrm{d}y=\dfrac{23}{15}$

例 2：计算曲线积分$\int_L (x^2-y^2)\mathrm{d}x-2xy\mathrm{d}y$，式中 L 为由点 $O(0,0)$ 沿直线 $y=x$ 到点 $A(1,1)$ 再由点 A 沿曲线 $x=\sqrt{2y-y^2}$ 到点 $B(0,2)$ 的路径。

分析：此积分路径虽然是两段曲线相加的，但仍为开曲线。只要找到起点 $O(0,0)$，终点 $B(0,2)$，且起点的 x,y 坐标分别 $\leqslant$ 终点的 x,y 坐标，可用**定理 1.1**。

解：$P=x^2-y^2$，$Q=-2xy$，$\dfrac{\partial P}{\partial y}=-2y=\dfrac{\partial Q}{\partial x}$

于是，据**定理 1.1** 有：

$$\int_L (x^2-y^2)\mathrm{d}x-2xy\mathrm{d}y=\int_0^0 P(x,y_0)\mathrm{d}x+\int_0^2 Q(0,y)\mathrm{d}y=0$$

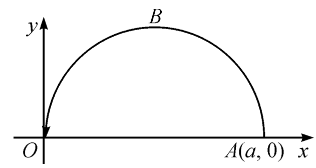

图 3 积分路径图

Fig. 3 Diagram of integral route

例 3：求$\int_{\overset{\frown}{ABO}}(\mathrm{e}^x\sin y-my)\mathrm{d}x+(\mathrm{e}^x\cos y-m)\mathrm{d}y$，其中$\overset{\frown}{ABO}$为由点 $A(a,0)$ 到点 $O(0,0)$ 的上半圆周 $x^2+y^2=ax$（图 3）。

分析：此曲线为开曲线。但此积分路径起点 $A(a,0)$，终点 $O(0,0)$，起点的 x,y 坐标分别 $\geqslant$ 终点的 x,y 坐标，不能直接应用**定理 1.1**，可先计算$\int_{L_{OA}}$，再利用**引理 1.2** 得到$\int_{L_{AO}}$。

解：因为

$$\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_D[\mathrm{e}^x\cos y-(\mathrm{e}^x\cos y-m)]\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_D m\mathrm{d}x\mathrm{d}y=m\cdot\frac{1}{2}\cdot\pi\left(\frac{a}{2}\right)^2=\frac{\pi ma^2}{8}。$$

且 $$\int_{x_0}^{x_1}P(x,y_0)\mathrm{d}x+\int_{y_0}^{y_1}Q(x_1,y)\mathrm{d}y=\int_0^a P(x,0)\mathrm{d}x+\int_0^0 Q(x_1,y)\mathrm{d}y=0$$

则由**定理 1.1** 得

$$\int_{\overset{\frown}{OBA}}(\mathrm{e}^x\sin y-my)\mathrm{d}x+(\mathrm{e}^x\cos y-m)\mathrm{d}y=-\frac{ma^2\pi}{8}$$

再由**引理 1.2** 得

$$\int_{\overset{\frown}{ABO}}(\mathrm{e}^x\sin y-my)\mathrm{d}x+(\mathrm{e}^x\cos y-m)\mathrm{d}y=-\int_{\overset{\frown}{OBA}}(\mathrm{e}^x\sin y-my)\mathrm{d}x+(\mathrm{e}^x\cos y-m)\mathrm{d}y=\frac{ma^2\pi}{8}。$$

例 4：设 L 为正向圆周 $x^2+y^2=2$ 在第一象限中的部分，则曲线积分$\int_l x\mathrm{d}y-2y\mathrm{d}x$ 的值______。

分析：此曲线为开曲线，且积分区域 D 为 1/4 圆的面积，利用**定理 1.1** 计算就会显得更为方便。

解：因为 $Q=x$，$P=-2y$，且$\dfrac{\partial Q}{\partial x}=1$，$\dfrac{\partial P}{\partial y}=-2$，所以

由**定理 1.1** 公式：

$$\int_l P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y=-\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\int_{x_0}^{x_1}P(x,y_0)\mathrm{d}x+\int_{y_0}^{y_1}Q(x_1,y)\mathrm{d}y$$

$$\int_{l^-}x\mathrm{d}y-2y\mathrm{d}x=-3\iint_D\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\int_0^{\sqrt{2}}-2y_0\mathrm{d}x+\int_{\sqrt{2}}^0 x_1\mathrm{d}y=-3\cdot\frac{\pi}{4}\cdot 2=-\frac{3\pi}{2}$$

则：$$\int_{l^+}x\mathrm{d}y-2y\mathrm{d}x=-\int_{l^-}x\mathrm{d}y-2y\mathrm{d}x=\frac{3\pi}{2}$$

例 5:设在上半平面 $D=\{(x,y)\mid y>0\}$ 内,函数 $f(x,y)$ 具有连续偏导数,且对任意 $t>0$ 的都有 $f(tx,ty)=t^{-2}f(x,y)$。证明:对 D 内的任意分段光滑的有向简单闭曲线 L,都有 $\oint_L yf(x,y)\mathrm{d}x-xf(x,y)\mathrm{d}y=0$。

分析:此为闭曲线,因为证明 $\oint_L yf(x,y)\mathrm{d}x-xf(x,y)\mathrm{d}y=0$,据格林公式显见只需证 $\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}=0$。

证明:由于函数 $f(x,y)$ 在上半平面 $D=\{(x,y)\mid y>0\}$ 内具有连续偏导数,且

$$\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}=(xf'_1+yf'_2)-2f(x,y)$$

由 $f(tx,ty)=t^{-2}f(x,y)$ 两边对 t 求导可得:

$$xf'_1+yf'_2=-2t^{-3}f(x,y),\text{令 } t=1 \text{ 得}:xf'_1+yf'_2=-2f(x,y)$$

所以:$\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}=-(xf'_1+yf'_2)-2f(x,y)=2f(x,y)-2f(x,y)=0$

由格林公式可得原式成立。即 $\oint_L yf(x,y)\mathrm{d}x-xf(x,y)\mathrm{d}y=0$

例 6:计算 $\oint_L \frac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{x^2+y^2}$,其中 L 为一条无重点、分段光滑且不经过原点的连续闭曲线,L 的方向为逆时针方向。

解:1) 当 $x^2+y^2\neq 0$ 时,利用格林公式有

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}=\frac{\partial P}{\partial y},\text{则}\oint_L \frac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{x^2+y^2}=0;$$

2) 当 $(0,0)\in D$ 时:利用**定理 1.2** 得:

$$\oint_L \frac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{x^2+y^2}=\oint_l \frac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{x^2+y^2}=\oint_l x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x=2\pi。$$

例 7:计算上题。其中积分路径为:$L_1:y=x^2,L_2:y=1,L_3:x=0$ 所围的闭曲线 L。

分析:此为闭曲线,且积分路径经过原点,按**定理 1.3** 做。

解:取曲线 L 为正向曲线,

$$\oint_L \frac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{x^2+y^2}=\int_{L_1}\frac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{x^2+y^2}+\int_{L_2}\frac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{x^2+y^2}+\int_{L_3}\frac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{x^2+y^2}$$

因为 $\int_{L_1}\frac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{x^2+y^2}=\lim\limits_{\varepsilon\to 0^+}\int_{0+\varepsilon}^{1}\frac{x^2\mathrm{d}x}{x^2+x^4}=\frac{\pi}{4}$;$\int_{L_2}\frac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{x^2+y^2}=-\int_1^0\frac{\mathrm{d}x}{x^2+1}=\frac{\pi}{4}$;$\int_{L_3}\frac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{x^2+y^2}=0$

所以 $\oint_L \frac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{x^2+y^2}=\int_{L_1}\frac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{x^2+y^2}+\int_{L_2}\frac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{x^2+y^2}+\int_{L_3}\frac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{x^2+y^2}=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}$

4　结　语

综上所述,利用上述定理计算平面第二类曲线积分时,无需更多的考察曲线是否与路径无关,是否取正向、反向,是否需要添加辅助线。也无需更多地考虑积分曲线方程是否复杂,以免代入后产生的计算繁琐。采用此定理时,只需先观察曲线是开曲线还是闭曲线,然后按照定理的条件、结论计算即可。但由于此定理主要是由格林公式推导而来的,故牵涉到将平面第二类曲线积分的计算转化为平面区域上的二重积分的计算,如果二重积分易计算,则此方法就更显示出其优越性。

参考文献:

[1] 同济大学数学系.高等数学:下册[M].6 版.北京:高等教育出版社,2007:191-213.

[2] 吴赣昌.高等数学(理工类):下册[M].北京:中国人民大学出版社,2007:104-118.

[3] 李润菁.探讨曲线积分问题的求解方法[J].宁德师专学报:自然科学版,2010(4):410-413.

[4] 梁存利.高数考研中有关曲线积分问题的求解方法[J].科技资讯,2009(36):156-157.

[5] 王淑兰,王洪林.积分路径上含有孤立奇点的第二类曲线积分[J].河北工程技术高等专科学校学报,2002(1):44-48.

[6] 冯烽.平面第二型曲线积分的解题思路与计算技巧[J].高等数学研究,2010(2):34-36.