浙江科技学院学报,第 24 卷第 4 期,2012 年 8 月
Journal of Zhejiang University of Science and Technology
Vol. 24 No. 4, Aug. 2012

DOI: 10.3969/j. issn. 1671-8798. 2012. 04. 001

两两 NQD 列的一个强大数律

沈建伟
(浙江科技学院 理学院,杭州 310023)

摘　要:利用随机变量的截尾方法和两两 NQD 序列的三级数定理,得到了矩条件下两两 NQD 序列的一类强大数定律,推广了若干已有的强大数律。

关键词:两两 NQD 列;强大数律;三级数定理
中图分类号:O211.4　　**文献标志码**:A　　**文章编号**:1671-8798(2012)04-0265-04

A strong law of large numbers for pairwise NQD sequence of random variables

SHEN Jian-wei
(School of Sciences, Zhejiang University of Science and Technology, Hangzhou 310023, China)

Abstract: A strong law of large numbers for pairwise NQD sequence of random variables are obtained under the moment conditions by the truncation methods of random variables and three series theorem of pairwise NQD sequence. The results available include some known theorems as special cases.

Key words: pairwise NQD sequence; strong law of large numbers; three series theorem

1　引言及引理

定义　称随机变量 X 和 Y 是 NQD(negatively quadrant dependent) 的,若对 $\forall x, y \in \mathbb{R}$ 都有

$$P(X < x, Y < y) \leqslant P(X < x)P(Y < y)。$$

则称随机变量列 $\{X_n, n \geqslant 1\}$ 是两两 NQD 的;若对 $\forall i \neq j$,则 X_i 与 X_j 是 NQD 的。

Lehmann[1] 提出来的两两 NQD 列是包含独立随机变量序列的一类相当广泛的随机变量序列,后来的许多负相联概念都是在此基础上繁衍出来的,NA 列[2] 就是其特例之一。近几年,关于两两 NQD 列的研究成果已不少[3-9],本文主要考虑两两 NQD 列的收敛性质,得到了一类极限定理,推广了文献[5] 的结果。

引理 1[10]　设 X 为随机变量,$g(x) > 0$ 为 $\mathbb{R}$ 上的非降函数。则对 $\forall x$,

$$P(X \geqslant x) \leqslant Eg(X)/g(x)。$$

收稿日期:2012-04-09
作者简介:沈建伟(1972—　),男,浙江省萧山人,讲师,硕士,主要从事基础数学教学和概率极限理论研究。

引理 2[1] 设随机变量 X 和 Y 是 NQD 的,则

(i)$EXY \leqslant EXEY$;

(ii)$P(X > x, Y > y) \leqslant P(X > x)P(Y > y), \forall x, y \in \mathbb{R}$;

(iii) 若 f, g 同为非降(或非增)函数,则 $f(X)$ 与 $g(Y)$ 仍为 NQD 的。

引理 3[5] 设$\{X_n, n \geqslant 1\}$是两两 NQD 列,对某 $c > 0$,记 $X_n^c \triangleq -cI(X_n < -c) + X_n I(|X_n| \leqslant c) + cI(X_n > c)$。若

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(|X_n| > c) < \infty, \tag{1}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} EX_n^c < \infty, \tag{2}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} Var(X_n^c)\log^2 n < \infty, \tag{3}$$

则 $\sum_{n=1}^{\infty} X_n$ a. s. 收敛。

设 c 代表正常数,在不同的地方可代表不同的值;用“$\ll$”代表通常意义下的“O”。

2 主要结果

定理 1 设$\{X_n, n \geqslant 1\}$是两两 NQD 列,$\{a_n, n \geqslant 1\}$为一正常数列。$\{g_n(x), n \geqslant 1\}$是定义在$\mathbb{R}$上的偶函数序列,且在区间 $x > 0$ 中取正值、不减;对每一个 $n \geqslant 1$,函数 $g_n(x)$ 满足下列条件之一:

(i) 在区间 $x > 0$ 中,存在 $p_n \in (0,1]$,使得 $x^{p_n}/g_n(x)$ 单调不减;

(ii) 在区间 $x > 0$ 中,存在 $p_n \in (1,2]$,使得 $x/g_n(x)$ 和 $g_n(x)/x^{p_n}$ 单调不增,且 $EX_n = 0, n \geqslant 1$。假定

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{Eg_n(X_n)}{g_n(a_n)}\log^2 n < \infty, \tag{4}$$

则 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{X_n}{a_n}$ a. s. 收敛。若进一步假定 $0 < a_n \uparrow \infty$,则由 Kronecker 引理,有

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{a_n}\sum_{i=1}^{n} X_n = 0, \text{a. s.}$$

注 1:在条件(i) 中取 $p_n \equiv 1$,在条件(ii) 中取 $p_n \equiv 2$,则文献[5] 中的定理 3 就成为它的特例;相应地,文献[5] 中的推论 1 ~ 3 也可由**定理 1** 推得。

定理 2 设$\{X_n, n \geqslant 1\}$是两两 NQD 列,$\{a_n, n \geqslant 1\}$为一正常数列。$\{g_n(x), n \geqslant 1\}$是定义在$\mathbb{R}$上的偶函数序列,且在区间 $x > 0$ 中取正值、不减;对每一个 $n \geqslant 1$,函数 $g_n(x)$ 满足:在区间 $x > 0$ 中,存在 $p_n \in [2, +\infty)$,使得 $x^{p_n}/g_n(x)$ 单调不减。假定

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{Eg_n(X_n)}{g_n(a_n)}\right)^{1/p_n} \log n < \infty, \tag{5}$$

则 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{X_n}{a_n}$ a. s. 收敛。若进一步假定 $0 < a_n \uparrow \infty$,则由 Kronecker 引理,有

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{a_n}\sum_{i=1}^{n} X_n = 0, \text{a. s.}$$

在**定理 2** 中,令 $g_n(x) \equiv |x|^p, p \in (0,2], \forall n \geqslant 1$,可得到下面重要推论:

推论 1 设$\{X_n, n \geqslant 1\}$是两两 NQD 列,$\{a_n, n \geqslant 1\}$为一正常数列且满足 $0 < a_n \uparrow \infty$,若存在某个 $p \in (0,2], p_n \in [2, +\infty)$ 使得

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{E|X_n|^p}{a_n^p}\right)^{1/p_n} \log n < \infty,$$

则

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{a_n}\sum_{i=1}^{n} X_n = 0, \text{a. s.}$$

3　定理的证明

定理 1 的证明　记 $X_n^{a_n}=-a_nI(X_n<-a_n)+X_nI(|X_n|\leqslant a_n)+a_nI(X_n>a_n)$

由**引理 2** 可知,$\{X_n/a_n,n\geqslant 1\}$ 仍是两两 NQD 列。

由**引理 3** 可知,只需验证式(1)～(3)成立即可,其中 $c=1$。

由式(4)可知
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{Eg_n(X_n)}{g_n(a_n)}<\infty。\tag{6}$$

由 $g_n(x)$ 是偶函数列且在区间 $x>0$ 中取正值、不减,**引理 1**,式(6)可得
$$\sum_{n=1}^{\infty}P(|X_n|>a_n)\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}\frac{Eg_n(X_n)}{g_n(a_n)}<\infty。\tag{7}$$

假设 $g_n(x)$ 满足条件(i),则在区间 $|x|\leqslant a_n$ 中,可得
$$\frac{|x|^{p_n}}{g_n(x)}\leqslant\frac{(a_n)^{p_n}}{g_n(a_n)};\frac{|x|^{p_n}}{(a_n)^{p_n}}\leqslant\frac{g_n(x)}{g_n(a_n)};\frac{|x|^2}{(a_n)^2}\leqslant\left(\frac{g_n(x)}{g_n(a_n)}\right)^{2/p_n}\leqslant\frac{g_n(x)}{g_n(a_n)}。\tag{8}$$

假设 $g_n(x)$ 满足条件(ii),则在区间 $|x|\leqslant a_n$ 中,可得
$$\frac{g_n(x)}{|x|^{p_n}}\geqslant\frac{g_n(a_n)}{(a_n)^{p_n}};\frac{|x|^{p_n}}{(a_n)^{p_n}}\leqslant\frac{g_n(x)}{g_n(a_n)};\frac{|x|^2}{(a_n)^2}\leqslant\left(\frac{g_n(x)}{g_n(a_n)}\right)^{2/p_n}\leqslant\frac{g_n(x)}{g_n(a_n)}。\tag{9}$$

因此,无论 $g_n(x)$ 满足条件(i)还是(ii),在区间 $|x|\leqslant a_n$ 中,都有
$$\frac{|x|^2}{(a_n)^2}\leqslant\frac{g_n(x)}{g_n(a_n)},对\ \forall n\geqslant 1。\tag{10}$$

由 Cr 不等式,式(10)得
$$\begin{aligned}E(X_n^{a_n})^2&\leqslant 3E(a_n^2I(X_n<-a_n)+X_n^2I(|X_n|\leqslant a_n)+a_n^2I(X_n>a_n))\ll\\&E(a_n^2I(|X_n|>a_n)+X_n^2I(|X_n|\leqslant a_n))\leqslant\\&a_n^2E\frac{g_n(X_n)}{g_n(a_n)}I(|X_n|>a_n)+Ea_n^2\frac{g_n(X_n)}{g_n(a_n)}I(|X_n|\leqslant a_n)\leqslant a_n^2E\frac{g_n(X_n)}{g_n(a_n)}。\end{aligned}$$

由上式及式(4)得
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{Var(X_n^{a_n})}{(a_n)^2}\log^2 n\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}\frac{E(X_n^{a_n})^2}{(a_n)^2}\log^2 n\ll\sum_{n=1}^{\infty}\frac{Eg_n(X_n)}{g_n(a_n)}\log^2 n<\infty。\tag{11}$$

若条件(i)满足,则结合式(8)可得
$$\begin{aligned}E|X_n^{a_n}|&\leqslant Ea_nI(|X_n|>a_n)+E|X_n|I(|X_n|\leqslant a_n)\leqslant\\&a_nE\frac{g_n(X_n)}{g_n(a_n)}I(|X_n|>a_n)+a_nE\left(\frac{|X_n|}{a_n}\right)^{p_n}I(|X_n|\leqslant a_n)\leqslant\\&2a_nEg_n(X_n)/g_n(a_n)。\end{aligned}$$

若条件(ii)满足,则可得
$$\begin{aligned}E|X_n^{a_n}|&\leqslant Ea_nI(|X_n|>a_n)+E|X_n|I(|X_n|\leqslant a_n)\leqslant\\&a_nE\frac{g_n(X_n)}{g_n(a_n)}I(|X_n|>a_n)+E|X_n|I(|X_n|>a_n))\leqslant\\&2a_nEg_n(X_n)/g_n(a_n)。\end{aligned}$$

故无论 $g_n(x)$ 满足条件(i)或(ii),都有
$$E|X_n^{a_n}|/a_n\leqslant 2Eg_n(X_n)/g_n(a_n)。$$

从而
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{E|X_n^{a_n}|}{a_n}\leqslant 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{Eg_n(X_n)}{g_n(a_n)}<\infty。\tag{12}$$

结合式(7)、式(11)和式(12),由**引理 3** 得 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{X_n}{a_n}$ a. s. 收敛。

定理 2 的证明　由式(5)易知
$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{Eg_n(X_n)}{g_n(a_n)}\right)^{1/p_n}<\infty。\tag{13}$$

由 $p_n \in [2,+\infty)$ 知 $1/p_n < 2/p_n \leqslant 1 < p_n$，正项级数的审敛法则，式(5)得

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{Eg_n(X_n)}{g_n(a_n)}\right)^{2/p_n}\log^2 n<\infty;\sum_{n=1}^{\infty}\frac{Eg_n(X_n)}{g_n(a_n)}\log^{p_n} n<\infty。\tag{14}$$

由 $p_n \geqslant 2$ 知式(14)蕴涵了

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{Eg_n(X_n)}{g_n(a_n)}\log^2 n<\infty;\sum_{n=1}^{\infty}\frac{Eg_n(X_n)}{g_n(a_n)}<\infty。\tag{15}$$

由 $g_n(x)$ 是偶函数列且在区间 $x>0$ 中取正值、不减，**引理 1**，式(15)可得

$$\sum_{n=1}^{\infty}P(|X_n|>a_n)\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}\frac{Eg_n(X_n)}{g_n(a_n)}<\infty。\tag{16}$$

在区间 $|x|\leqslant a_n$ 中，由 $x^{p_n}/g_n(x)$ 单调不减知

$$\frac{|x|^{p_n}}{g_n(x)}\leqslant\frac{(a_n)^{p_n}}{g_n(a_n)};\frac{|x|^{p_n}}{(a_n)^{p_n}}\leqslant\frac{g_n(x)}{g_n(a_n)}。\tag{17}$$

利用 Jensen 不等式，式(17)可得

$$\begin{aligned}E|X_n^{a_n}|&\leqslant Ea_nI(|X_n|>a_n)+E|X_n|I(|X_n|\leqslant a_n)\leqslant\\&a_nE\frac{g_n(X_n)}{g_n(a_n)}I(|X_n|>a_n)+a_nE\frac{|X_n|}{a_n}I(|X_n|\leqslant a_n)\leqslant\\&a_nE\frac{g_n(X_n)}{g_n(a_n)}I(|X_n|>a_n)+a_n\left(E\left(\frac{|X_n|}{a_n}\right)^{p_n}I(|X_n|\leqslant a_n)\right)^{1/p_n}\leqslant\\&a_nE\frac{g_n(X_n)}{g_n(a_n)}+a_n\left(\frac{Eg_n(X_n)}{g_n(a_n)}\right)^{1/p_n}\end{aligned}$$

从而

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{E|X_n^{a_n}|}{a_n}\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}\frac{Eg_n(X_n)}{g_n(a_n)}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{Eg_n(X_n)}{g_n(a_n)}\right)^{1/p_n}<\infty。\tag{18}$$

由 Cr 不等式，Jensen 不等式，式(17)得

$$\begin{aligned}E(X_n^{a_n})^2&\leqslant 3E(a_n^2I(X_n<-a_n)+X_n^2I(|X_n|<a_n)+a_n^2I(X_n>a_n))\ll\\&Ea_n^2I(|X_n|>a_n)+EX_n^2I(|X_n|<a_n)\leqslant\\&a_n^2E\frac{g_n(X_n)}{g_n(a_n)}I(|X_n|>a_n)+(E|X_n|^{p_n}I(|X_n|<a_n))^{2/p_n}\leqslant\\&a_n^2E\frac{g_n(X_n)}{g_n(a_n)}+a_n^2\left(\frac{Eg_n(X_n)}{g_n(a_n)}\right)^{2/p_n}。\end{aligned}$$

由上式及式(14)和式(15)得

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{Var(X_n^{a_n})}{(a_n)^2}\log^2 n\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}\frac{E(X_n^{a_n})^2}{(a_n)^2}\log^2 n\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}\frac{Eg_n(X_n)}{g_n(a_n)}\log^2 n+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{Eg_n(X_n)}{g_n(a_n)}\right)^{2/p_n}\log^2 n<\infty。\tag{19}$$

结合式(16)、式(18)和式(19)，由**引理 3** 得 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{X_n}{a_n}$ a. s. 收敛。

参考文献：

[1] Lehmann E L. Some concepts of dependence [J]. Ann Math Stat, 1966, 37(5): 1137-1153.
[2] Joag-dev K, Proschan F. Negative association of random variables with applications[J]. Ann Stat, 1983, 11(1): 286-295.
[3] Matula P. A note on the almost sure convergence of sums of negatively dependent random variables[J]. Stat Probab Lett, 1992, 15(3): 209-213.
[4] 王岳宝，苏淳，刘许国. 关于两两 NQD 列的若干极限性质[J]. 应用数学学报，1998，21(3)：404-414.
[5] 吴群英. 两两 NQD 列的收敛性质[J]. 数学学报，2002，45(3)：617-624.
[6] 刘莉. 两两 NQD 列的一个强大数定律[J]. 应用概率统计，2004，20(2)：184-188.
[7] 陈平炎. 两两 NQD 列的强大数定律[J]. 数学物理学报，2005，25A(3)：386-392.
[8] 万成高. 两两 NQD 列的大数定律和完全收敛性[J]. 应用数学学报，2005，28(2)：253-261.
[9] 陈平炎. 两两 NQD 随机序列的 L^r 收敛性[J]. 数学物理学报，2008，28A(3)：447-453.
[10] 林正炎，白志东. 概率不等式[M]. 北京：科学出版社，2006.