浙江科技学院学报,第 24 卷第 4 期,2012 年 8 月
Journal of Zhejiang University of Science and Technology
Vol. 24 No. 4, Aug. 2012

DOI: 10.3969/j. issn. 1671-8798. 2012. 04. 002

一维三次单位分解有限元插值的最优误差估计

李　蔚
(浙江科技学院 理学院,杭州 310023)

摘　要:推导了一维三次单位分解有限元插值的最优阶误差。用标准的分片线性有限元基函数作单位分解,根据相容性和局部逼近性构造了一个特殊的局部多项式逼近空间,从而得到了具有 3 阶再生性的单位分解有限元插值格式;再应用 Taylor 展开及平均多项式插值理论推导插值误差估计。结果表明,误差估计阶比局部逼近阶要高,因而是最优的。

关键词:最优误差估计;单位分解有限元法;三次插值;局部逼近空间

中图分类号:O241.82;O241.1　　　**文献标志码**:A　　　**文章编号**:1671-8798(2012)04-0269-04

Optimal error estimate for partition of unity finite element method interpolants of 3-degree in 1-dimension

LI Wei
(School of Sciences, Zhejiang University of Science and Technology, Hangzhou 310023, China)

Abstract: Optimal error estimate for partition of unity finite element method (PUFEM) interpolants of 3-degree in one dimension is provided. Using standard linear finite element base functions as partition of unity, a special polynomial local approximation space can be established according to the consistence and local approximation properties. And PUFEM interpolants with reproducing property of order 3 is constructed. Then the interpolation error estimation of PUFEM is given by applying various techniques of Taylor expansion and theories of average polynomials interpolation. The result shows that the error estimate has higher order than the local approximation and is optimal.

Key words: optimal error estimate; partition of unity finite element method; interpolants of 3-degree; local approximation space

收稿日期:2012-03-22

基金项目:浙江省教育厅科研计划项目(Y201120196)

作者简介:李　蔚(1987—　),女,湖南省益阳人,讲师,博士,主要从事偏微分方程数值算法的理论及其应用研究。

单位分解有限元法(partition of unity finite element method, PUFEM)最早出现在文献[1]中,是 Babuska 等人为求解粗糙系数椭圆方程而提出的一种基于单位分解法(PUM)的特殊有限元法(FEM),实质上是一种无网格方法。由于它允许把解析解的局部性态信息包含在有限元空间中,所以能有效地应用于经典有限元法不能求解的问题,例如粗糙系数或高阶振荡解的问题。1996 年 Melenk 和 Babuska 在文献[2]中正式提出单位分解有限元法的概念,同时还给出了该方法的一些相关定义和一个误差估计定理,文中提到影响 PUFEM 的收敛性和计算精度的关键要素是 PUFEM 空间基的选取。为此,Strouboulis 等人在文献[3]中对不同类型的非标准方程提出了不同的基函数选取方法,虽然比较全面,但文献[3]只是侧重介绍了这些方法在工程上的应用,对数值结果的数学意义和误差分析讨论得很少。目前,有关 PUFEM 误差分析的文献较少,且是以 Babuska 等人所做的基础研究为主。1997 年 Babuska 和 Melenk 在文献[4]中给出了一些通用的 PUFEM 先验后验误差估计;2003 年 Babuska 等人把 PUFEM 当时的研究现状写成了综述[5],完善了个别误差分析定理,给出了关键的数学证明和一参考文献列表;2004 年再次对 PUFEM 的原理、应用和误差估计做了一个综述[6],并提出了几个待解决的问题。2006 年 Strouboulis 等人在文献[7]中构造了一个 PUFEM 的后验误差估计,数值算例说明了该误差估计的有效性和可靠性。应用单位分解法的原理,Huang 和 Xu 对重叠非匹配网格提出了一种协调有限元法[8]。最近,Li 对于求解二阶椭圆边值问题的一类 PUFEM,研究了其离散线性方程组的条件数的渐进行为,在局部逼近空间选取为多项式空间时,给出了一个条件数的上界值[9]。

由 PUFEM 的原理可知,如果取通常的分片线性函数作单位分解,局部逼近空间取常数,此时 PUFEM 就是标准 FEM,收敛率本该是 $O(h)$,但 Babuska 和 Melenk 在文献[4]中的误差估计式得不到这个收敛率;若取线性多项式作局部逼近空间,此时 PUFEM 是 FEM,而不是标准 FEM,收敛率本该是 $O(h^2)$,但根据文献[4]中的误差估计式只能得到 $O(h)$。这说明已有的误差分析只能给出与局部逼近阶相同的误差估计阶。那么,能否通过选取最优局部逼近空间得到比局部逼近阶更高的收敛阶呢?即当局部误差估计阶为 p 时,整体误差估计阶能否大于或等于 $p+1$?为此,笔者以相对简单的一维下 $p=2$ 的情形进行了初步研究。

1 一维三次 PUFEM 插值格式的构造

在此,介绍一维下逼近阶为 2 阶的局部逼近空间的构造及三次 PUFEM 插值格式。

一维下,假定 (a,b) 是问题域。将区间 (a,b) 分成

$$a = x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b。$$

令 $h_i = x_i - x_{i-1}, h = \max\limits_i h_i, e_i = (x_{i-1}, x_i), i = 2,3,\cdots,n$。选取通常的有限元分片线性函数 $\{\varphi_i\}$ 作为 PUFEM 中的单位分解,那么就可以取这些线性函数的支集作为 PUFEM 中的块 $\{\Omega_i\}$。由二次多项式组成的局部逼近空间选取为

$$V_i = \mathrm{span}\{1, x - x_i, (x - x_i)^2\}。 \tag{1}$$

因为函数 $\{\varphi_i\}$ 构成一个单位分解,所以有 $u = (\sum\limits_i \varphi_i) u = \sum\limits_i (\varphi_i, u)$,那样

$$(u - u_1)' = (\sum_i \varphi_i (u - v_i))' = \sum_i \varphi'_i (u - v_i) + \sum_i \varphi_i (u - v_i)'。$$

直接计算可得

$$\| u - u_I \|_1 = o(h^2)。$$

其中 u_I 表示 u 的插值函数。笔者将给出一个更精确的构造性分析来得到 3 阶最优插值误差估计。关键部分在于在每个 V_i 中选取一个恰当的元素使得 $\sum\limits_i \varphi_i v_i$ 容许更高阶精度。

在任一个块上,构造 u 的局部多项式逼近为

$$v_i(x) = u(x_i) + \frac{2}{3} u'(x_i)(x - x_i) + \frac{1}{6} u''(x_i)(x - x_i)^2。 \tag{2}$$

则 u 在 V 中的插值 $u_I(x)$ 为

$$
\begin{aligned}
u_I(x) = &\sum_{i=1}^{n}\varphi_i(x)v_i(x) = \\
&\sum_{i=1}^{n}\varphi_i(x)\left[u(x_i)+\frac{2}{3}u'(x_i)(x-x_i)+\frac{1}{6}u''(x_i)(x-x_i)^2\right]。
\end{aligned}
\tag{3}
$$

2　一维三次 PUFEM 插值的最优误差估计定理及证明

首先验证插值(3)再生所有三次多项式。由于任意单元 e_i 通过等参变换都能变换成参考元(0,1)，故只需验证参考区间上的再生性。

在(0,1)上，单位分解函数形式如下：

$$\varphi_0(x)=1-x,\varphi_1(x)=x。$$

则插值 $U_I(x)$ 为

$$
\begin{aligned}
U_I(x) = &(1-x)[U(0)+\frac{2}{3}U'(0)x+\frac{1}{6}U''(0)x^2]+ \\
&x\left[U(1)+\frac{2}{3}U'(1)(x-1)+\frac{1}{6}U''(1)(x-1)^2\right]。
\end{aligned}
\tag{4}
$$

引理 1　对任意多项式 $U\in P_3$，插值(4)式再生 U，即 $U_I=U$。

证明　只需验证多项式 $U=x^m,m=0,1,2,3$ 时的结果。

当 $U=1$ 时，易知

$$U_I=(1-x)+x=1=U。\tag{5}$$

当 $U=x$ 时，有

$$
\begin{aligned}
&U(0)=0,U'(0)=1,U''(0)=0,\\
&U(1)=1,U'(1)=1,U''(1)=0。
\end{aligned}
$$

因此

$$U_I(x)=(1-x)\left[0+\frac{2}{3}x+0\right]+x\left[1+\frac{2}{3}(x-1)+0\right]=x=U。\tag{6}$$

当 $U=x^2$ 时，易看出

$$
\begin{aligned}
&U(0)=0,U'(0)=0,U''(0)=2,\\
&U(1)=1,U'(1)=2,U''(1)=2。
\end{aligned}
$$

因此

$$
\begin{aligned}
U_I(x) = &(1-x)\left[0+0+\frac{1}{6}\times 2x^2\right]+ \\
&x\left[1+\frac{2}{3}\times 2(x-1)+\frac{1}{6}\times 2(x-1)^2\right]= \\
&x^2=U。
\end{aligned}
\tag{7}
$$

最后，当 $U=x^3$ 时，

$$
\begin{aligned}
&U(0)=U'(0)=U''(0)=0,\\
&U(1)=1,U'(1)=3,U''(1)=6。
\end{aligned}
$$

故

$$
\begin{aligned}
U_I(x) = &(1-x)[0+0+0]+x\left[1+\frac{2}{3}\times 3(x-1)+\frac{1}{6}\times 6(x-1)^2\right]= \\
&x^3=U。
\end{aligned}
\tag{8}
$$

综合式(5)～(8)可知，插值(4)式具有 3 阶再生性。证毕。

由**引理 1** 和 Bramble-Hilbert 引理，可以得到插值(3)式的最优误差估计定理如下：

定理 1 设$\{\varphi_i\}$是一维有限元分片线性函数,u_I 是如式(3)中所定义的 PUFEM 插值。如果 $u \in W^{4,q}(a,b)$,则有最优插值误差估计

$$\|u-u_I\|_{l,q,(a,b)} \leqslant Ch^{4-l}\|u\|_{4,q,(a,b)}, l=0,1,1\leqslant q\leqslant\infty \tag{9}$$

3 结 语

本研究采用构造分析法,根据相容性和局部逼近性构造了一个特殊的二次多项式局部逼近空间,得到了具有 3 阶再生性的单位分解有限元插值格式,从而得到了比局部逼近要高一阶的最优误差估计。这个结果对文献[3]中的误差估计式是一个有力的补充和完善,但仅对一维下局部逼近阶为 2 的情形进行了讨论;对于 PUFEM 的最优分析而言这还只是一个起步,今后笔者将继续对高维下高阶的 PUFEM 进行最优误差分析,以逐步完善 PUFEM 的最优误差分析理论体系。

参考文献:

[1] Babuska I, Caloz G, Osborn J. Special finite element methods for a class of second order elliptic problems with rough coefficients[J]. SIAM Journal Numerical Analysis,1994,31(4):945-981.

[2] Melenk J M, Babuska I. The partition of unity finite element method: basic theorey and applications[J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering,1996(1/4),139:289-314.

[3] Strouboulis T, Copps K, Babuska I. The generalized finite element method[J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering,2001,190(32/33):4081-4193.

[4] Babuska I, Melenk J M. The partition of unity method[J]. International Journal for Numerical Methods in Engneering,1997,40(4):727-758.

[5] Babuska I, Banerjee U, Osborn J E. Survey of meshless and generalized finite element methods: a unified approach [J]. Acta Numerica,2003,12:1-125.

[6] Babuska I, Banerjee U, Osborn J E. Generalized finite element methods: main ideas, results and perspective[J]. International Journal of Computational Methods,2004,1(1):67-103.

[7] Strouboulis T, Zhang L, Wang D, et al. A posteriori error estimation for generalized finite element methods[J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering,2006,195(9/12):852-879.

[8] Huang Y Q, Xu J C. A conforming finite element method for overlapping and nonmatching grids[J]. Methematics of Computation,2003,72(243):1057-1066.

[9] Li H G. A note on the conditioning of a class of generalized finite element methods[J]. Applied Numerical Mathematics,2012,62(6):754-766.