浙江科技学院学报,第24卷第4期,2012年8月
Journal of Zhejiang University of Science and Technology
Vol. 24 No. 4, Aug. 2012

DOI:10.3969/j.issn.1671-8798.2012.04.004

连续和间断的探讨

陶志雄
(浙江科技学院 理学院,杭州 310023)

摘　要:讨论了一些流行的教科书中对连续和间断的定义和表述。通过讨论一些初等函数的例子,对连续和间断提出了自己的理解、表述和探讨。认为按照拓扑情形下的连续定义,任何初等函数在其定义域内连续,从而说明了两种定义的不同,并给出了建议。
关键词:连续;间断;函数;映射;拓扑
中图分类号:O13　　**文献标志码**:A　　**文章编号**:1671-8798(2012)04-0278-05

Investigation of continuity and discontinuity

TAO Zhi-xiong
(School of Sciences, Zhejiang University of Science and Technology, Hangzhou 310023, China)

Abstract: The author discusses the expressions and definitions of continuity and discontinuity in some popular text books. By giving some elementary functions, the author puts forward his own understanding, expression and investigation for these concepts and theories. According to the definition of the continuity of a map in the topology, any elementary function is continuous in the domain, which shows these two definitions are different. A suggestion is given for the issue.
Key words: continuity; discontinuity; function; map; topology

对于一元函数 $y=f(x)$,习惯上总是将其定义域内的点分成连续点和间断点两类,也把一些定义域外的点(如区间的端点)归为间断点。表面上看,这样的说法似乎无懈可击,但事实上,由于这种分法的含糊性,或者有的作者没有去注重原始的定义,所以这类题目常会有不同的答案(结果),导致一些学生的质疑。为此,笔者对这一问题作一些简单的探讨,以供读者参考。

1　连续和间断的定义

不同的作者对连续及间断的定义有着少许的不同,在此作一些比较。

收稿日期:2012-01-03
基金项目:浙江科技学院教学研究项目(2009ⅡB-a53)
作者简介:陶志雄(1961—　),男,浙江省绍兴人,副教授,博士,主要从事几何拓扑学研究及大学数学教学。

首先看看《托马斯微积分》[1] 中有关连续和间断的定义：

定义 1　内点：函数 $y = f(x)$ 在其定义域的内点 c 处是连续的，如果 $\lim\limits_{x\to c} f(x) = f(c)$。

端点：函数 f 在其定义域的左端点 a 或右端点 b 是连续的，如果分别有

$$\lim_{x\to a+} f(x) = f(a),\lim_{x\to b-} f(x) = f(b)$$

如果 f 在点 c 处不是连续的，就说 f 在 c 间断，而 c 是 f 的一个间断点。注意 c 不必在 f 的定义域中。

在这个定义中，要求连续点 c 是该函数的定义域内的内点，而间断点则定义为不连续的点。由于这个点 c 可以不是定义域内的点(原文：Note that c need not be in the domain of f)，既然不是定义域内的点，就不可能是内点，笔者认为这样的定义是比较含糊不清的，因为这意味着非定义域内的区间端点都是间断点。因此，笔者认为这不是很合理。

菲赫金哥尔茨的《微积分学教程》[2] 中有关连续和间断的定义：

定义 2　函数 $f(x)$ 在点 x_0 处的连续性意义可归结如下：对于不论怎样的数 $\varepsilon > 0$ 必能求出数 $\delta > 0$，使由 $|x - x_0| < \delta$ 可引出 $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$。

这样，最后的不等式在点 x_0 的充分小的邻域 $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ 内就应该成立。

$$f(x_0 + 0) = \lim_{x\to x_0+0} f(x) = f(x_0), f(x_0 - 0) = \lim_{x\to x_0-0} f(x) = f(x_0)。$$

若这两个关系式内的一式或另一式不成立，则函数 $f(x)$ 在点 x_0 处右间断或左间断。

连续性的定义与前面的定义一样，但间断点的定义有所不同，作者认为定义左右间断点不是很有必要。因为该作者比较注重直观，所以他对连续的定义其实也是来自几何直观，但是对于间断点的定义似乎缺乏直观的几何意义。所以也不符合他原有的风格。

华东师范大学的《数学分析》[3] 和同济大学的《高等数学》[4] 的定义分别为：

定义 3　设函数 f 在某 $U(x_0)$ 内有定义。若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$，则称 f 在点 x_0 连续。

设函数 f 在某 $U^0(x_0)$ 内有定义。若 f 在点 x_0 无定义，或 f 在点 x_0 有定义而不连续，则点 x_0 为函数 f 的间断点或不连续点。

定义 4　设函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 的某一邻域内有定义，如果 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$，那么就称函数 $f(x)$ 在点 x_0 连续。

设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某去心邻域内有定义，在此前提下，如果函数 $f(x)$ 有下列 3 种情形之一：

1) 在 $x = x_0$ 没有定义；

2) 虽在 $x = x_0$ 有定义，但 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 不存在；

3) 虽在 $x = x_0$ 有定义，且 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在，但 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) \neq f(x_0)$，则函数 $f(x)$ 在点 x_0 为不连续，而点 x_0 称为函数 $f(x)$ 的不连续点或间断点。

在国内，这两本书是被广泛采用的教材，很有代表性，比较它们的定义可以看到，虽然表述不同，但无论是连续点还是间断点的定义都是一致的。笔者也认为这样的定义比较合理。下面的讨论基本上是基于这两个定义展开的。

2　连续点和间断点的讨论

根据**定义 3** 和**定义 4**，考察下面的例子：

例 1　设函数 $y = f(x)$ 的图形如图 1 所示，试指出 $f(x)$ 的全部间断点，并对可去间断点补充或修改函数值的定义，使它成为连续点。

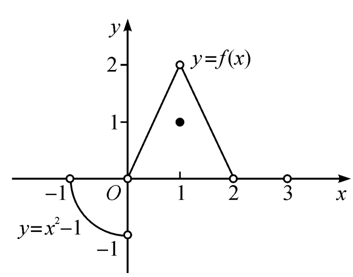

图 1　间断点的例

Fig. 1　Example of discontinous point

这是一本知名教科书(同济大学《高等数学》[4]64，上面的一道练习题，答案为：

$x = -1, 0, 1, 2, 3$ 均为 $f(x)$ 的间断点，除 $x = 0$ 外，均为 $f(x)$ 的可去间断点，补充那个定义 $f(-1) = f(2) = f(3) = 0$，修改定义，使 $f(1) = 2$。

上面的表述除了图名外都是按照原题原答案抄录下来的。从题目的答案可以看到，解答者将区间的端点（此例中的 $x=-1,3$）也列为间断点，这不符合（该书）间断点的定义。因为间断点要求函数在该点的去心邻域内也要有定义。而端点并不符合这一要求。

从这一例子可以看到，其实有一些读者的间断点概念是比较含糊的。再看下面的例子：

例 2　请指出函数是 $f(x)=\sqrt{x^2(x^3-1)}$，$g(x)=\sqrt{|\sin x|(x-1)}$ 的间断点。

不难看出函数 $f(x)$ 的定义域为 $\{0\}\cup\{x\mid x\geqslant 1\}$，而函数 $g(x)$ 的定义域为 $\{x\mid x=k\pi(0\geqslant k\in\mathbb{Z})\}\cup\{x\geqslant 1\}$，对于连续点一般很多人会回答是 $\{x\mid x\geqslant 1\}$，但问到间断点，有时也会含糊地回答 $x=0$ 是函数 $f(x)$ 的间断点，而 $\{x\mid x=k\pi,0\geqslant k\in\mathbb{Z}\}$ 是函数 $g(x)$ 的所有间断点。如果对照定义，明显地，这样的回答是有问题的，其实它们既不是连续点也不是间断点，即使是使用菲赫金哥尔茨的定义也不能得出它们是间断点。事实上，它们都是孤立点，即它们的某个去心邻域与函数的定义域没有公共点。那么是否既不是连续点也不是间断点的点必是孤立点吗？考察下例：

例 3　设函数 $h(x)=\sqrt{|\sin x^{-1}|x}$，求其间断点。

解：$h(x)$ 的定义域为 $\left\{\frac{1}{k\pi},k\in\mathbb{Z}\right\}\cup\{x>0\}$，注意到当 $x_k=\frac{1}{k\pi}(k\in\mathbb{Z})$ 时，$h(x_k)=0$，同上知道 $\left\{x_k=\frac{1}{k\pi},0>k\in\mathbb{Z}\right\}$ 都不是间断点，也不是连续点。有趣的是 $x=0$ 是一个特殊的点，虽然它既不是间断点，也不是连续点，但它也不是孤立点，而且如果补充定义 $h(0)=0$，那么也只能得到函数在该点是右连续的，由此可见“两不是”的点未必是孤立点。

综上讨论，对于一个函数来说连续点和间断点之间并不是非此即彼的关系。也请注意这里所举的例子都是初等函数。

3　概念进一步推广的探讨

以上是对于一元函数的间断点讨论，对于二元函数一般的高等数学书籍都没有给出间断点的定义，但却在说某些函数如二元函数的间断点全体可能是曲线等。在此，笔者试图将上述讨论进一步推广，其目的是希望对点进行分类。为此，先来看拓扑意义上的连续定义，有关概念请查看任何一本一般拓扑学的书籍及相关材料。

J. Dugundji 的 TOPOLOGY[5] 中关于连续的定义：

定义 5　设 $(X,\mathfrak{I}_X)$ 和 $(Y,\mathfrak{I}_Y)$ 是拓扑空间，映射 $f:X\to Y$ 称为是连续的，若 Y 中每个开集的逆像是 X 中开集（即，若 f^{-1} 映 $\mathfrak{I}_Y$ 到 $\mathfrak{I}_X$ 中）。

肖盖（G. Choquet）的《拓扑学教程》[6] 中连续的定义：

定义 6　称拓扑空间 X 到拓扑空间 Y 的映射 f 在 X 的点 x_0 连续，是指对于 $f(x_0)$ 的任何邻域 V，存在 x_0 在 X 中的邻域 v，使得 $f(v)\subset V$。

明显地，对于连续这两位作者的定义是一致的。

笔者认为这两个定义和上述一元函数的情形是不一致的。如果考察前面的例 3，按照这两个定义，例 3 中函数的定义域就是 $X=\left\{\frac{1}{k\pi}\mid k\in\mathbb{Z}\right\}\cup\{x>0\}$，且 X 中每个点都是连续的，这是因为 X 遗传的是 $\mathbb{R}$ 的拓扑，那些孤立点自然也是开集，也就是在这些孤立点 $\left\{\frac{1}{k\pi}\mid 0>k\in\mathbb{Z}\right\}$ 上函数也是连续的。事实上，可以证明。

定理　如果按照**定义 5** 和**定义 6**，则初等函数在其定义域内必定连续。

证明请参考本文第 4 节。（如果按照第 1 节的定义，只能得出：初等函数在其定义区间内必连续）。

高等数学中函数的连续性定义与拓扑意义上映射的连续性定义的不同点在于前者使用 $\mathbb{R}$ 的拓扑来考察函数的连续，而后者则是考察定义域的拓扑，也就是使用相对拓扑来讨论连续性的。因此如果要照搬

函数的情形，那么就必须修改定义如下：

定义 7　称拓扑空间 Z 的子空间 $X \subset Z$ 到拓扑空间 Y 的映射 f 在 X 的聚点 x_0 上连续，是指对于 $f(x_0)$ 的任何邻域 V，$f^{-1}(V)$ 是 x_0 在 Z 中的邻域。

很显然，一个映射是否连续，也和 X 所在的空间 Z 有关。

不难看出，这个定义比**定义 5** 和**定义 6** 更加一般，也符合第 1 节中的情形。换言之，第 1 节中的情形是这个定义的特殊情形。

但要将间断点的概念推广到一般的情形是比较困难的。即使是推广到 $\mathbb{R}^2$ 也有不同的思路。笔者在这里做一初步的探讨。

定义 8　设 f 是从拓扑空间 Z 的子空间 $X \subset Z$ 到拓扑空间 Y 的映射，则 $f(x)$ 有下列 4 种情形之一：

1）若 $x_0 \notin X$ 是 X 的聚点，但不是 $Z - X$ 中内点序列的极限点；

2）若 $x_0 \in X$ 不是 X 的聚点；

3）若存在拓扑空间中 Z 的含 x_0 的邻域 U，使得 f 有定义，且 $x_0 \in X$ 是 X 的聚点，但 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ 不存在；

4）条件同 3)，虽 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ 存在，但 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) \neq f(x_0)$，则称映射 f 在点 x_0 不连续，而点 x_0 称为 $f(x)$ 的不连续点或间断点。

这个间断点的定义明显是一元函数的情形推广。实际上，由于一般情形的复杂性，笔者认为要能对间断点分类就应该定义各种类型的间断点，这样能够仔细、客观、精准地描述映射的特性。

例 4　二元实函数 $f(x,y) = \sin \dfrac{1}{x^2 + y^2 - 1}$，它的间断点全体是 $\{(x,y) \mid x^2 + y^2 = 1\}$。

例 5　二元实函数 $f(x,y) = \dfrac{xy}{x+y}$，它的间断点全体是 $\{(x,y) \mid x + y = 0\}$。

例 6　二元实函数 $f(x,y) = \dfrac{\sqrt{y \mid y^2 - x^2 \mid}}{x^2 + y^2} + \sqrt{y(\cos(x^2 + y^2) - 1)}$，它的定义域是

$\{(x,y) \mid y \geqslant 0\} \cup \{(x,y) \mid y = x, \text{或 } y = -x\} \cap \{(x,y) \mid x^2 + y^2 = 2k\pi, y < 0, k \in \mathbb{N}\} - \{(0,0)\}$。

容易得到 $\{(x,y) \mid y = x, \text{或 } y = -x\} \cap \{(x,y) \mid y < 0, x^2 + y^2 = 2k\pi, k \in \mathbb{N}\}$ 既不是连续点也不是间断点且都是孤立点，而 $(0,0)$ 不仅既不是连续点也不是间断点，而且不是孤立点。

4　定理的证明

重述**定理**：初等函数 $f: X(\subset \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ 必在 X 上连续。

注：这里所说的连续是指**定义 5** 和**定义 6** 意义上的。而且未必是一元函数。

下面的证明在方法上和一般的高等数学书稍有不同，供读者参考。事实上，这个证明也完全可以按照高等数学书中的相应证明修改得到，只是这里的邻域未必是区间，对于一元函数来说，一般可以理解为 $\mathbb{R}$ 中开区间和定义域的交。

从**定义 5** 和**定义 6** 可知，若 $f: X_1(\subset X) \to Z$ 是拓扑空间之间的连续映射，$A \subseteq X_1$，则对于 Z 中任何开集 V，$f^{-1}(V)$ 是 X_1 中开集，故 $f^{-1}(V) \cap A$ 也是空间 A 中之开集；换言之，映射 $f|_A: A \to Z$ 也是连续的。另外，因为 $f^{-1}(V) \cap A = (f|_A)^{-1}(V \cap f(A))$，故 $f|_A: A \to f(A)$ 也连续（如果按照高等数学的连续定义，这个函数就未必连续了）。由此不难证明若 $f: X_1(\subset X) \to Z$ 连续，$g: Y(\subset Z) \to H$ 连续，则

$$h = g \cdot f: f^{-1}(f(X_1) \cap Y) \to H$$

也是连续的，其中假设 $f(X_1) \cap Y \neq \varnothing$。事实上，因为 $h^{-1} = (f|_{f^{-1}(f(X_1) \cap Y)})^{-1} \cdot (g|_{f(X_1) \cap Y})^{-1}$，利用上面刚得到的结果及**定义 5** 和**定义 6** 即得其连续性。

下证连续函数之四则运算后所得函数也是连续的。

假设 $f: X(\subset \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$，$g: Y(\subset \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ 连续，则 f、$g: X \cap Y \to \mathbb{R}$ 也连续。

构作函数 $h: X \cap Y \to \mathbb{R}$，使得 $h(x) = f(x) + g(x)$，对 $x_0 \in X \cap Y$ 及 $\forall \varepsilon > 0$，设 $U(h(x_0), \varepsilon)$ 是

$h(x_0) = f(x_0) + g(x_0)$ 的邻域，则 $V = f^{-1}[U(f(x_0), \varepsilon/2)] \cap g^{-1}[U(g(x_0), \varepsilon/2)]$ 是在 $X \cap Y$ 中含 x_0 的邻域(它未必是区间)，对于 $\forall x \in V$，则 $f(x) \in U(f(x_0), \varepsilon/2)$，$g(x) \in U(g(x_0), \varepsilon/2)$，于是有 $h(x) \in U(h(x_0), \varepsilon)$，也就是 $h(V) \subset U(h(x_0), \varepsilon)$，即 h 是连续函数。

易证 $h = -f: X(\subset \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ 也是连续函数。所以两个连续函数的和差也是连续函数。

假设 $f: X(\subset \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$，$g: Y(\subset \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ 连续，设 $h: X \cap Y \to \mathbb{R}$，使得 $h(x) = f(x)g(x)$。

a) 如果 f 和 g 其中有一个是常值函数，则 $h(x)$ 显然是连续的。

b) 一般地，若 $x_0 \in X \cap Y$，由 f 和 g 的连续性可知存在邻域 $U(x_0) \cap X \cap Y$ 使得 $f(x) + |f(x_0)| + 1 > 0$，$g(x) + |g(x_0)| + 1 > 0$，$U(x_0)$ 是 $\mathbb{R}$ 中开集。

考虑函数 $h_1(x) = (f(x) + |f(x_0)| + 1)(g(x) + |g(x_0)| + 1)$，因为

$$h(x) = h_1(x) - g(x)(|f(x_0)| + 1) - f(x)(|g(x_0)| + 1) - (|f(x_0)| + 1)(|g(x_0)| + 1),$$

这样，若证明 $h_1(x)$ 在 x_0 连续，则结合 a) 及和差函数的连续性结论，可得 $h(x)$ 也连续。

在邻域 $U(x_0) \cap X \cap Y$ 内，由于

$$\begin{aligned} h_1(x) &= \exp[\ln(f(x) + |f(x_0)| + 1)(g(x) + |g(x_0)| + 1)] = \\ &\exp[\ln(f(x) + |f(x_0)| + 1) + \ln(g(x) + |g(x_0)| + 1)], \end{aligned}$$

利用和差函数的连续性和复合函数的连续性，不难得到 $h_1(x)$ 在 x_0 处连续。

若 $h(x) = [f(x)]^{-1}$，且 $f(x_0) \neq 0$，若 $f(x_0) > 0$，则由连续性，存在 x_0 的邻域 $U \subset X$ 使得对于任何的 $x \in U$，$f(x) > 0$。在邻域 $U \subset X$ 内，因 $h(x) = \exp[-\ln f(x)]$，所以它在 x_0 处连续。如果 $f(x_0) < 0$，相似地也可以证明 $h(x)$ 在 x_0 处连续。

这样就证明了初等函数在定义域内(**定义 5** 和**定义 6** 意义上的)连续。

这个定理也说明了拓扑意义上的对连续的定义，其条件似乎比高等数学中对函数连续的定义条件要宽松些。因为在高等数学中只能证明函数在定义区间内连续。而上面的几个例子都说明了孤立点不可能是连续点，但在拓扑意义上则认为它们是连续点。所以这两个定义有较大的不同。

5 结 语

通过上述讨论，笔者提出这个问题，希望有一个统一的说法。而上述的讨论也算是一些简单的尝试。供读者参考。

参考文献：

[1] Thomas G B. 托马斯微积分[M]. 10 版. 叶其孝，王耀东，唐兢，译. 北京：高等教育出版社，2003.
[2] 菲赫金哥尔茨. 微积分学教程[M]. 8 版. 路见可，余家荣，吴亲仁，译. 北京：高等教育出版社，2006.
[3] 华东师范大学数学系. 数学分析[M]. 3 版. 北京：高等教育出版社，2006.
[4] 同济大学数学系. 高等数学[M]. 6 版. 北京：高等教育出版社，2007.
[5] Dugundji J. TOPOLOGY [M]. Boston: Allyn and Bacon Inc.，1966.
[6] Choquet G. 拓扑学教程[M]. 2 版. 史树中，王耀东，译. 北京：高等教育出版社，2009.
[7] 毛战军. 理解多元函数连续性的新方法[J]. 洛阳师范学院学报，2011，30(11)：9-10.