浙江科技学院学报，第 24 卷第 4 期，2012 年 8 月
Journal of Zhejiang University of Science and Technology
Vol. 24 No. 4, Aug. 2012

DOI: 10.3969/j. issn. 1671-8798. 2012. 04. 012

信号类课程教学中连续与离散的类比性

潘文诚，徐鸿飞，李津蓉，孙月兰，李曙光
（浙江科技学院 自动化与电气工程学院，杭州 310023）

摘　要：从探索信号类课程中连续和离散两部分内容并行讲授的角度出发，对具有共性和可比性的知识点进行了类比性的解读。涉及时域分析中连续信号和离散序列的内在联系，连续系统和离散系统的卷积分析法，频域分析中基于傅里叶变换与离散时间傅里叶变换的频谱分析法，复频域分析中的基于拉氏变换和 z 变换的系统函数法，以及从连续性与周期性看傅里叶变换和离散傅里叶变换的本质等方面的内容。简要地给出了课程整合的实践思路。

关键词：信号类课程；连续；离散；类比性；并行讲授
中图分类号：G642.0；TN911.7　　**文献标志码**：A　　**文章编号**：1671-8798(2012)04-0323-06

Analogy of continuity and discreteness in teaching of signal courses

PAN Wen-cheng, XU Hong-fei, LI Jin-rong, SUN Yue-lan, LI Shu-guang
(School of Automation and Electrical Engineering, Zhejiang University of Science and Technology, Hangzhou 310023, China)

Abstract: To search after the possibility of parallel teaching for the continuous and discrete parts in the signal courses, we analyze the knowledge points of common and comparable nature. The study relates to the internal relations of continuous signals and discrete sequence in time-domain analysis, the convolution analysis method of continuous systems and discrete systems, the spectrum method based on Fourier transform and discrete-time Fourier transform in frequency-domain analysis, the system function method based on Laplace transform and z-transform in complex frequency-domain analysis, and behold the essence of Fourier transform and discrete Fourier transform from the continuity and cyclical. Furthermore, the practice idea of curriculum reform is put forward.

Key words: signal courses; continuity; discreteness; analogy; parallel teaching

---

收稿日期：2011-09-01
基金项目：浙江科技学院教学研究重点项目(2009ⅠA-001)
作者简介：潘文诚(1952—　)，男，江苏省宝应人，教授，主要从事数字信号处理、测控技术与仪器的研究。

信号类课程一般指信号与系统和数字信号处理两门课程，其从信号的时间特性和频率特性入手，重点讲述确定性信号经过线性时不变系统的分析和综合。信号与系统课程主要针对连续时间系统，数字信号处理课程主要针对离散时间系统展开讨论[1-8]。在长期的教学实践中，笔者既体会到了信号类课程对于电类专业学生学习后续专业课的重要性，也发现了两门课程内容有部分的混叠。虽然两课各自都具有比较成熟和经典的内容，但为求自身课程体系的完整，必然有部分内容的重复和赘叙[9-10]。这种重复和赘叙使数学分析量过大，工程概念薄弱，加重了两门课的学时负担，也不易使学生了解学科的工程背景。

本文通过举例，对信号类课程连续与离散两部分中具有共性和可比性的知识点进行类比性的解读，力求能抓住贯穿信号类课程全局的主线，为连续与离散两部分内容的教学改革做一些探索性的工作。

1 时域分析的类比性举例

1.1 连续时间信号与离散序列

时域中的信号无论是连续的还是离散的，一般均是将信号的幅值表示为时间的函数。现以常见正弦函数信号与正弦序列为例，解读其类比性。

正弦函数信号的一般形式为

$$x(t) = A\cos(\omega t + \varphi) \tag{1}$$

式(1) 中：ω— 角频率，rad/s；A— 振幅；φ— 初相角。波形图如图 1(a) 所示。

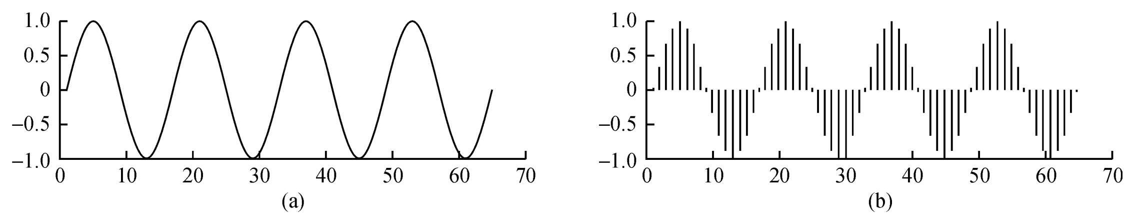


图 1 正弦函数信号与正弦序列

Fig. 1 Sinusoidal signal and sine series

正弦序列的波形如图 1(b) 所示。可以这样来看，对正弦函数信号 $x(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$ 在时间轴 t 上进行等间隔抽样，即 $t = nT_s$(n 为抽样序号，无量纲；T_s 为抽样间隔，单位 s)，就可得到正弦序列

$$x(nT_s) = x(t)\mid_{t=nT_s} = A\cos(\omega nT_s + \varphi) \tag{2}$$

在式(2) 中，令 $\Omega = \omega T_s$，称 Ω 为数字角频率(单位为 rad)；又由于 T_s 是一个常数，通常将 $x(nT_s)$ 简写成 $x(n)$。这样，式(2) 可简写为下列形式：

$$x(n) = A\cos(\Omega n + \varphi) \tag{3}$$

值得注意的是，和连续时间正弦信号不同的是，离散时间正弦序列并非都是周期信号。这是因为离散时间信号的自变量 n 只能取整数，因而周期序列的周期 N 也一定是整数。在正弦序列中，并非对任何 Ω 都能找到满足周期性要求的正整数 N。

1.2 连续系统和离散系统的卷积分析法

设一个连续的线性时不变因果系统的激励为 $x(t)$，响应为 $y(t)$，即 $y(t) = T[x(t)]$。同样，把在单位冲激 $\delta(t)$ 作用下的系统响应记作 $h(t)$，即 $h(t) = T[\delta(t)]$。这里，假设输入时系统已处于稳态，其响应为零状态响应。单位冲激响应 $h(t)$ 反映了线性时不变系统的特征，下面通过表 1 所示的输入输出关系来描述线性时不变系统的卷积分析法。

表 1 连续线性时不变系统的输入输出关系

Table 1 Input-output relationship of continuous linear time-invariant system

序号	输 入	输 出	输入输出描述
1	$\delta(t)$	$h(t)$	$h(t)$ 为系统的冲激响应，表征了系统的特征
2	$x(\tau)\delta(t)$	$x(\tau)h(t)$	$x(\tau)$ 为常数，系统满足比例性
3	$x(\tau)\delta(t-\tau)$	$x(\tau)h(t-\tau)$	系统满足时不变性
4	$\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\delta(t-\tau)\mathrm{d}\tau$	$\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)\mathrm{d}\tau$	积分即求和，系统满足可加性

由单位冲激信号 $\delta(t)$ 的筛选特性,当 $\tau = t$ 时,记表 1 序号 4 的输入为:

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\delta(t-\tau)\mathrm{d}\tau \tag{4}$$

则表 1 序号 4 的输出为

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)\mathrm{d}\tau = x(t) * h(t) \tag{5}$$

可见,线性时不变连续系统的响应 $y(t)$ 是系统激励 $x(t)$ 和系统冲激响应 $h(t)$ 的卷积分。

同样的思路,可得到离散线性时不变系统的卷积分析法。把在单位脉冲序列 $\delta(n)$ 作用下的系统响应记作为 $h(n)$,称为系统的单位脉冲响应。对于任意整数 m,由系统的线性和时不变特性,当激励为 $x(m)\delta(n-m)$ 时,响应必为 $x(m)h(n-m)$。于是,对于激励 $x(n)$ 为 $\delta(n)$ 的移位加权和,即

$$x(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)\delta(n-m)$$

时,系统零状态响应 $y(n)$ 为

$$y(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)h(n-m) = x(n) * h(n) \tag{6}$$

式(6) 的 $y(n)$ 即为激励 $x(n)$ 的响应。即一旦求得系统的单位脉冲响应 $h(n)$,只要计算激励信号 $x(n)$ 和 $h(n)$ 的"卷积和",就可得到激励 $x(n)$ 引起的系统零状态响应 $y(n)$。

2　复频域和频域分析的类比性举例

2.1　基于拉氏变换和 z 变换的系统分析法

拉氏变换是连续系统复频域分析的工具,它把描述连续系统的微分方程转化成代数方程来解;描述线性时不变连续系统的常系数线性微分方程的一般形式为:

$$y(t) + a_1\frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t} + \cdots + a_{N-1}\frac{\mathrm{d}^{N-1}y(t)}{\mathrm{d}t^{N-1}} + a_N\frac{\mathrm{d}^N y(t)}{\mathrm{d}t^N} =$$

$$b_0 x(t) + b_1\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} + \cdots + b_{N-1}\frac{\mathrm{d}^{N-1}x(t)}{\mathrm{d}t^{N-1}} + b_N\frac{\mathrm{d}^N x(t)}{\mathrm{d}t^N}$$

系统为零状态时,对上式两边取拉氏变换,由拉氏变换的线性性质和微分性质可得

$$Y(s) + \sum_{m=1}^{N} a_m s^m Y(s) = \sum_{m=0}^{M} b_m s^m X(s) \tag{7}$$

定义连续系统的系统函数为

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{\sum_{m=0}^{M} b_m s^m}{1 + \sum_{m=1}^{N} a_m s^m} \tag{8}$$

求解连续系统的时域响应可通过式(7) 和式(8) 得:

$$Y(s) = X(s)H(s)$$

$$y(t) = L^{-1}[Y(s)]$$

z 变换是离散系统复频域分析的工具,它把描述离散系统的差分方程转化成代数方程来解。描述线性时不变离散系统的常系数线性差分方程的一般形式:

$$y(n) + a_1 y(n-1) + \cdots + a_{N-1}y(n-N+1) + a_N y(n-N) =$$

$$b_0 x(n) + b_1 x(n-1) + \cdots + b_{M-1}x(n-M+1) + b_M y(n-M)$$

系统为零状态时,对上式两边取 z 变换,由 z 变换的线性性质和移位性质可得

$$Y(z) + \sum_{m=1}^{N} a_m z^{-m} Y(z) = \sum_{m=0}^{M} b_m z^{-m} X(z) \tag{9}$$

类似地,定义离散系统的系统函数为

$$H(z)=\frac{Y(z)}{X(z)}=\frac{\sum_{m=0}^{M}b_m z^{-m}}{1+\sum_{m=1}^{N}a_m z^{-m}} \tag{10}$$

求解离散系统的时域响应可通过式(9)和式(10)得：

$$Y(z)=X(z)H(z)$$

$$y(n)=Z^{-1}[Y(z)]$$

2.2 基于傅里叶变换与离散时间傅里叶变换的频谱分析

满足狄里赫利条件的周期信号可以展开为傅里叶级数(FS)，傅里叶级数展开式有三角形式和复指数形式。由三角形式的谐波系数、复指数形式的傅里叶系数都可以得到周期信号的幅值频谱和相位频谱，它们都是非周期的离散谱线。从周期信号的傅里叶级数可推导出非周期信号傅里叶变换(FT)的定义。傅里叶变换得到的非周期信号的频谱密度函数 $X(j\omega)$ 是随频率连续变化的频谱。

对应地，序列的离散时间傅里叶变换(DTFT)又称序列的傅里叶变换，是离散序列在 z 平面的单位圆上取其 z 变换，也称之为序列的频谱。序列的频谱是周期的、连续的。序列 $x(n)$ 的离散时间傅里叶变换 $X(\mathrm{e}^{j\Omega})$ 就是其对应的连续信号 $x(t)$ 理想抽样后的傅里叶变换。

连续信号 $x(t)$ 经理想抽样得到的抽样信号 $x_s(t)$ 可记作

$$x_s(t)=x(t)\delta_T(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(nT_s)\delta(t-nT_s)$$

利用冲激函数 $\delta(t)$ 的傅里叶变换、傅里叶变换的时移特性和线性特性，以及模拟角频率与数字角频率的对应关系，对上式作傅里叶变换(FT)，得理想抽样信号的频谱：

$$X_s(j\omega)=\mathscr{F}[x_s(t)]=\mathscr{F}[\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(nT_s)\delta(t-nT_s)]=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(nT_s)\mathscr{F}[\delta(t-nT_s)]=$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(nT_s)\mathrm{e}^{-j\omega nT_s}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)\mathrm{e}^{-j\omega nT_s}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)\mathrm{e}^{-jn\Omega}=X(\mathrm{e}^{j\Omega})$$

所以，序列 $x(n)$ 的离散时间傅里叶变换 $X(\mathrm{e}^{j\Omega})$ 就是其对应的连续信号 $x(t)$ 理想抽样后的傅里叶变换 $X(j\omega)$。

3 从连续性与周期性看傅里叶变换和离散傅里叶变换的类比性

离散傅里叶变换(DFT)作为有限长序列的傅里叶表示，在实现各种数字信号处理算法中起着核心作用，它使得在计算机上实现信号处理成为可能。

3.1 4种不同形式的傅里叶变换

信号的时间特性和频率特性都会呈现出周期与非周期，连续与非连续的特点。表2列出了4种不同特点的信号的时间函数和频率函数的波形对应关系，以及时域频域的变换形式。

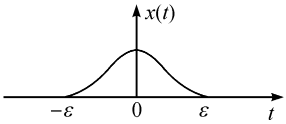
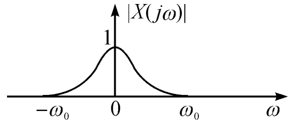
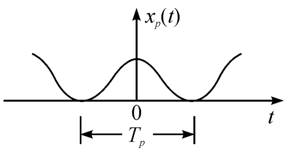
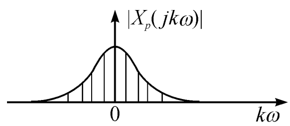
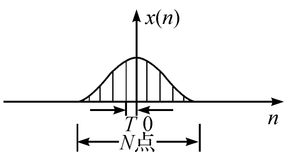
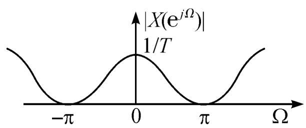
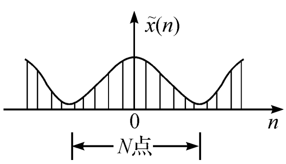
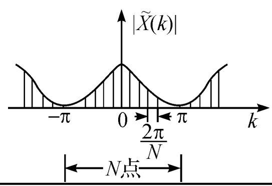
对于非周期的连续时间函数 $x(t)$，其傅里叶变换 $X(j\omega)$ 在频域上也是连续的。时间函数和频率函数的形式如表2中第1种情况所示。若连续信号 $x(t)$ 为有限长信号，根据信号时宽与频宽的关系可知，$X(j\omega)$ 的频率范围为 $-\infty\sim\infty$。

若对连续时间信号 $x(t)$ 在时域上以 T 为周期进行抽样 M 点，则得到离散序列 $x(n)$。时间函数和频率函数的形式如表2第3种情况所示。与表2中第1种情况连续信号的频谱图进行比较，可以看出离散序列的傅里叶变换 $X(\mathrm{e}^{j\Omega})$ 是连续信号的傅里叶变换 $X(j\omega)$ 在频域上以 2π 为周期的周期性延拓，这是由于序列 $x(n)$ 是对连续信号 $x(t)$ 在时间上的离散化，时域的离散性导致了频谱的周期性。

从表2中可以发现以下规律：时域的周期性对应着频域的离散性；时域的离散性对应着频域的周期性。按照这个规律，表中的第4种情况(离散的周期信号的离散傅里叶级数变换DFS)：由于时域是周期的而导致了频域的离散；由于时域是离散的而导致了频域的周期。因此时域上的周期离散序列在频域应同时呈现离散和周期的特征。

表 2　4 种不同特点信号的傅里叶变换

Table 2　Fourier transforms of 4 different characteristic signals

信号类别	时间函数特点	频率函数特点	时域频域变换形式
1	非周期连续信号 	连续的非周期频谱 	傅里叶变换（FT） $X(j\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}x(t)\mathrm{e}^{-j\omega t}\mathrm{d}t$ $x(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}X(j\omega)\mathrm{e}^{j\omega t}\mathrm{d}\omega$
2	周期连续信号 	离散的非周期频谱 	傅里叶级数变换（FS） $X_p(jk\omega_1)=\frac{1}{T_p}\int_{T_P}x_p(t)\mathrm{e}^{-jk\omega_1 t}\mathrm{d}t$ $x_p(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}X(jk\omega_1)\mathrm{e}^{jk\omega_1 t}$
3	非周期离散序列 	连续的周期频谱 	序列的傅里叶变换（DTFT） $X(\mathrm{e}^{j\Omega})=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)\mathrm{e}^{-j\Omega n}$ $x(n)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}X(\mathrm{e}^{j\Omega})\mathrm{e}^{jn\Omega}\mathrm{d}\Omega$
4	周期的离散信号 	离散的周期频谱 	离散傅里叶级数变换（DFS） $\widetilde{X}(k)=\sum_{n=0}^{N-1}\widetilde{x}(n)\cdot\mathrm{e}^{-j\frac{2\pi}{N}nk}$ $\widetilde{x}(n)=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\widetilde{X}(k)\cdot\mathrm{e}^{j\frac{2\pi}{N}nk}$

3.2　从傅里叶变换到离散傅里叶变换

正如连续时间周期信号可以用傅里叶级数（FS）表示一样（表 2 中第 2 种情况），周期序列也可以用离散傅里叶级数（DFS）来表示（表 2 中的第 4 种情况），该级数相当于成谐波关系的复指数序列（正弦型序列）之和。也就是说，复指数序列的频率是周期序列 $\widetilde{x}(n)$ 的基频（$\frac{2\pi}{N}$）的整数倍，形式为 $\mathrm{e}^{j\frac{2\pi}{N}kn}$，$k$ 为整数。可见，复指数序列对 k 呈现周期性，周期也为 N。

也可这样来看，若对 $x(n)$ 的离散时间傅里叶变换 $X(\mathrm{e}^{j\Omega})$ 在 z 平面单位圆上的 N 个等分点对 Ω 进行抽样，也就是在一个周期内对 $X(\mathrm{e}^{j\Omega})$ 进行 N 次抽样，此时，$X(\mathrm{e}^{j\Omega})\big|_{\Omega=\frac{2\pi}{N}k}=\sum_{n=0}^{M-1}x(n)\mathrm{e}^{-j\frac{2\pi}{N}kn}$。由此，周期性的连续谱 $X(\mathrm{e}^{j\Omega})$ 就变成了周期性的离散谱，变量由连续量 Ω 变成了离散量 k，即表 2 的第 4 种情况。如果再对此周期性的离散谱取其主值序列，即令 k 的范围为 $0\sim(N-1)$，则有如下形式：

$$X(k)=\sum_{n=0}^{M-1}x(n)\mathrm{e}^{-j\frac{2\pi}{N}kn},0\leqslant k\leqslant N-1 \tag{11}$$

由此可见，如果对 $X(\mathrm{e}^{j\Omega})$ 在单位圆上的抽样点数 N 等于序列 $x(n)$ 长度 M，$X(k)$ 即为有限长序列 $x(n)$ 的 DFT。

通过上面的分析可以看到，离散傅里叶变换（DFT）引入了一种在时域和频域上均为离散形式且长度有限的傅里叶变换，这种变换的最大优势是计算过程可以在计算机上实现，使信号的实时机助处理成为可能。DFT 隐含着连续性，只要同时满足时域抽样理论和频域抽样理论的条件，就可以利用 DFT 来分析连续信号的傅里叶变换（FT）。DFT 还隐含着周期性，它是周期序列 $\widetilde{x}(n)$ 的离散傅里叶级数展开（DFS）的“借用”形式，只要把 $x(n)$ 和 $X(k)$ 分别理解成 $\widetilde{x}(n)$ 和 $\widetilde{X}(k)$ 的主值序列，那么 DFT 和 DFS 这两种变换的表示形式是完全相同的，就可以利用 DFT 来计算 FT，使误差减小到可接受的程度。

4 结 语

本文针对信号类课程中连续与离散两部分中具有共性或可比性的知识点进行了举例解读。其实这些理论和方法上的类比性还有很多，比如：连续和离散信号的加、减、乘运算，连续信号的卷积分运算和离散序列的卷积和运算，连续和离散信号中的移位、翻褶和尺度运算，模拟滤波器与数字滤波器的技术指标与幅频特性，线性时不变的连续和离散系统均满足比例性与可加性，以及用傅里叶变换的卷积定理、离散傅里叶变换的圆周卷积定理来分析综合连续和离散系统等。

在教学实践中笔者想到，如果对连续和离散这两个不同的分析对象，用相同的分析思路形成的分析工具进行并行讲述的话，不但可节省大量的课时，而且易使学生理解课程的精髓，掌握连续与离散两部分中信号分析与处理、系统分析与综合的理论和方法，这无疑是具有积极意义的。从修订后的浙江科技学院2008版教学计划开始，笔者将非信息类专业的原设置在两个学期的信号与系统(51学时)和数字信号处理(51学时)两门课程合并在同一个学期讲授，暂定名为信号与系统分析基础课程(64学时)，并按照连续和离散部分并行讲授的原则编写与出版了相应的教材，加强了仿真实验的分量和工程背景的展示，力求使信号类课程从纯数学的教学环境中解脱出来，取得了一定的效果。在信号类课程的教学改革中，对连续与离散两部分进行并行整合的关键是抓住贯穿全局的主线，串起具有共性和可比性的知识点，授之予学生理论分析和综合的方法，这里还有很多事要做，很长的路要走，需要同行教师们的共同努力。

参考文献：

[1] 郑君里，应启珩，杨为理. 信号与系统[M]. 2版. 北京：高等教育出版社，2000.

[2] 程佩青. 数字信号处理教程[M]. 2版. 北京：清华大学出版社，2002.

[3] 胡广书. 数字信号处理：理论、算法与实现[M]. 2版. 北京：清华大学出版社，2003.

[4] 吴大正，杨林耀，张永瑞. 信号与线性系统分析[M]. 3版. 北京：高等教育出版社，1998.

[5] Oppenheim A V，Willsky A S. Signal and System[M]. 2nd ed. Englewood Cliffs，NJ：Prenice Hall，1997.

[6] 李培芳，孙晖，李红. 信号与系统分析基础[M]. 北京：清华大学出版社，2006.

[7] 刘顺兰，吴杰. 数字信号处理[M]. 西安：西安电子科技大学，2003.

[8] 潘文诚，徐宏飞，李津蓉. 信号与系统分析基础(非信息类专业)[M]. 北京：机械工业出版社，2011.

[9] 张虹，赵钰婷，张宇辉.《信号与系统》课堂教学改革与实践[J]. 吉林化工学院学报：2011，28(8)：48-49.

[10] 李宇，周怡. 数字信号处理类课程分析与教学改革[J]. 中国电力教育，2011(17)：91-92.