浙江科技学院学报，第25卷第3期，2013年6月
Journal of Zhejiang University of Science and Technology
Vol. 25 No. 3，Jun. 2013

doi：10.3969/j.issn.1671-8798.2013.03.001

弱量子代数 $\omega U(D)$

孙钦秀[1]，于　丽[2]
（1.浙江科技学院 理学院，杭州 310023；2.山东水利职业学院 基础部，山东 日照 276826）

摘　要：在具有参数的量子包络代数中增加一个新的生成子 J，对于某些整数 n，使 J 满足 $J^n=J$，从而把这类量子包络代数做了一种新的推广，得到一类弱量子代数，记为 $\omega U(D)$。通过给 $\omega U(D)$ 定义余乘法和余单位，使之成为双代数。进一步证明它的一个子代数是弱 Hopf 代数。

关键词：弱 Hopf 代数；对极；双代数
中图分类号：O153.3　　**文献标志码**：A　　**文章编号**：1671-8798(2013)03-0161-03

Weak quantum algebra $\omega U(D)$

SUN Qinxiu[1]，YU Li[2]
（1. School of Sciences，Zhejiang University of Science and Technology，Hangzhou 310023，China；
2. Foundation Department，Shandong Water Polytechnic，Rizhao 276826，China）

Abstract：A new kind natural generalizations of quantized enveloping algebra with positive parameter is formed by adding a new generator J satisfying $J^n=J$ for some integer n. This algebra is denoted by $\omega U(D)$. The comultiplication and counit are defined so as to make $\omega U(D)$ a bialgebra. Furthermore，a subalgebra of $\omega U(D)$ is proved to be a weak Hopf algebra.

Key words：weak Hopf algebra；antipode；bialgebra

1　介　绍

近年来，不少学者致力于 Hopf 代数的推广，得到一些比较好的代数结构，并且广泛应用于数学、物理领域。一种推广是在研究低维量子场论的对称性时得到的，方法就是通过引入弱余乘法，使得 $\Delta(1)\neq 1\otimes 1$，从而得到了一类弱 Hopf 代数，具体可以参考文献[1]；另一种推广是通过对双代数定义一个弱对基，也得到了一类弱 Hopf 代数[2]，左、右 Hopf 代数都包含在这类弱 Hopf 代数中。受文献[2-6]的启发，笔者将文献[7]中定义的量子代数结构作推广，得到了一类弱 Hopf 代数。

收稿日期：2013-02-01
基金项目：数学天元基金项目(11226069)；浙江省自然科学基金项目(LQ13A010018)
作者简介：孙钦秀(1980—　)，女，山东省临沂人，讲师，博士，主要从事 Hopf 代数与量子群、李代数研究。

2 主要结果

为了把文献[6]中定义的量子代数推广为弱量子代数，将 y_m 的可逆性弱化为正则性，即用 $y_m,\overline{y_m}$ 代替 y_m,y_m^{-1}，同时满足一定的条件。引入一个新的生成子 J，使得 $J^{n-1}=y_m\overline{y}_m$，$J^{n-1}=J$，同时对 a_i 满足的条件也作一定的改变。若 a_i 满足 $y_ha_i=\chi_i(Y_h)a_iy_h$，$a_i\overline{y}_h=\chi_i(Y_h)\overline{y}_ha_i$，称 a_i 是1型的；若 a_i 满足 $y_ha_i\overline{y}_h=\chi_i(Y_h)a_i$，则称 a_i 是0型的。记 $d=(k_1,k_2,\cdots,k_\theta)$，$k_i=0$ 或者 1，$i=1,2,\cdots,\theta$。

定义1 假设 $D=D((a_{ij}),(q_I),(g_i),(\chi_i),(\lambda_{ij}))$ 是 generic datum。弱量子代数 $\omega U(D)$ 是域 k 上具有单位元1的结合代数，由 $J,a_i(1\leqslant i\leqslant\theta),y_m,\overline{y}_m(1\leqslant m\leqslant s)$ 生成并且满足下面的关系：

(1) $J^{n-1}=y_m\overline{y}_m\neq 1,J^n=J$；

(2) $y_h\overline{y}_m=\overline{y}_my_h,y_hy_m=y_my_h,\overline{y}_m\overline{y}_h=\overline{y}_h\overline{y}_m$；

(3) $y_hJ=Jy_h,J\overline{y}_h=\overline{y}_hJ,y_hJ^{n-1}=J^{n-1}y_h,J^{n-1}\overline{y}_h=\overline{y}_hJ^{n-1}$；

(4) a_i 是 d 型的；

(5) $\displaystyle\sum_{l=0}^{1-a_{ij}}(-1)^l\begin{pmatrix}1-a_{ij}\\ l\end{pmatrix}_{q_{ii}^{\frac{l(l-1)}{2}}}a_i^{1-a_{ij}-l}a_ja_i^l=0,1\leqslant i\neq j\leqslant\theta,i\sim j$；

(6) $a_ia_j-\chi_j(g_i)a_ja_i=\lambda_{ij}(J^{n-1}-g_ig_j),1\leqslant i\leqslant j\leqslant\theta,i\sim' j$。

注：**定义1** 中的 $i\sim j$ 表示 i,j 属于相同的连通分支，而 $i\sim' j$ 表示 i,j 属于不同的连通分支，详细内容可参见文献[7]。

引理2 J^{n-1} 是 $\omega U(D)$ 的中心幂等元。

证明 易证 J^{n-1} 与 $y_h,\overline{y}_m$ 可交换。如果 a_i 是1型的，则 $J^{n-1}a_i=y_h\overline{y}_ha_i=\chi_i^{-1}(Y_h)\chi_i(Y_h)a_iy_h\overline{y}_h=a_iJ^{n-1}$；如果 a_i 是0型的，则 $J^{n-1}a_i=y_h\overline{y}_ha_i=\chi_i^{-1}(Y_h)y_h\overline{y}_hy_ha_i\overline{y}_h=\chi_i^{-1}(Y_h)y_ha_i\overline{y}_h=\chi_i^{-1}(Y_h)y_ha_i\overline{y}_hy_h\overline{y}_h=a_iJ^{n-1}$，所以 J^{n-1} 与 a_i 可交换。

如果 a_i 是0型的，即 $y_ha_i\overline{y}_h=\chi_i(Y_h)a_i$，则 $y_ha_i=y_hJ^{n-1}a_i=y_ha_iJ^{n-1}=y_ha_i\overline{y}_hy_h=\chi_i(Y_h)a_iy_h$ 和 $a_i\overline{y}_h=\chi_i(Y_h)\overline{y}_ha_i$。因此，利用归纳法可以证明下列引理：

引理3 $a_i^my_h^n=\chi_i^{-mn}(Y_h)y_h^na_i^m,a_i^m\overline{y}_h^n=\chi_i^{mn}(Y_h)\overline{y}_h^na_i^m$。

定义3个映射 $\Delta:\omega U(D)\to\omega U(D)\otimes\omega U(D)$，$\varepsilon:\omega U(D)\to k$ 和 $T:\omega U(D)\to\omega U(D)$，其中具体定义如下：

$$\Delta(y_h)=y_h\otimes y_h,\Delta(\overline{y}_h)=\overline{y}_h\otimes\overline{y}_h,\Delta(J)=J\otimes J,$$

$$\Delta(a_i)=\begin{cases}1\otimes a_i+a_i\otimes y_i,a_i\text{ 是 1 型的},\\ J^{n-1}\otimes a_i+a_i\otimes y_i,a_i\text{ 是 0 型的},\end{cases}$$

$$\varepsilon(y_h)=\varepsilon(\overline{y}_h)=1,\varepsilon(J)=1,\varepsilon(a_i)=0。$$

$$T(1)=1,T(y_h)=\overline{y}_h,T(\overline{y}_h)=y_h,T(J)=J,T(a_i)=-a_i\overline{y}_i。$$

定理4 $(\omega U(D),\Delta,\varepsilon)$ 是一个双代数。

证明 通过计算可以直接证明 ε 保持定义1中的所有关系，Δ 保持关系(1)(2)(3)。接着将证明 Δ 保持**定义1** 中的其他关系。

若 a_i 是1型的，则有

$\Delta(y_h)\Delta(a_i)=(y_h\otimes y_h)(1\otimes a_i+a_i\otimes y_i)=y_h\otimes y_ha_i+y_ha_i\otimes y_hy_h=\chi_i(Y_h)y_h\otimes a_iy_h=\chi_i(Y_h)\Delta(a_i)\Delta(y_h)$.

若 a_i 是0型的，则有

$\Delta(y_h)\Delta(a_i)\Delta(\overline{y}_h)=(y_h\otimes y_h)(J^{n-1}\otimes a_i+a_i\otimes y_i)(\overline{y}_h\otimes\overline{y}_h)=\chi_i(Y_h)J^{n-1}\otimes a_i+\chi_i(Y_h)a_i\otimes y_i=\chi_i(Y_h)\Delta(a_i)$。

因此 Δ 保持关系(4)。接着证明 Δ 保持关系(5)，即 $\sum_{l=0}^{1-a_{ij}}(-1)^l\begin{bmatrix}1-a_{ij}\\ l\end{bmatrix}_{q_{ii}^{\frac{l(l-1)}{2}}}q_{ij}^l\Delta(a_i^{1-a_{ij}-l})\Delta(a_j)\Delta(a_i^l)=0$，只需要考虑如下几种情况($i\neq j$)：

(i)a_i 是 1 型的，a_j 是 1 型的；

(ii)a_i 是 1 型的，a_j 是 0 型的；

(iii)a_i 是 0 型的，a_j 是 1 型的；

(iv)a_i 是 0 型的，a_j 是 0 型的。

在情况(iv)下，根据**引理 3**，有

$$\Delta(a_i^s)=J^{n-1}\otimes a_i^s+a_i^s\otimes y_i^s+\sum_{r=0}^{s-1}q_i^{r(s-r)}\begin{bmatrix}s\\ r\end{bmatrix}_{q_{ii}^{\frac{l(l-1)}{2}}}a_i^rJ^{n-1}\otimes a_i^{s-r}y_i^r,$$

因此

$$\sum_{l=0}^{1-a_{ij}}(-1)^l\begin{bmatrix}1-a_{ij}\\ l\end{bmatrix}_{q_{ii}^{\frac{l(l-1)}{2}}}\Delta(a_i^{1-a_{ij}-l})\Delta(a_j)\Delta(a_i^l)=$$

$$\sum_{l=0}^{1-a_{ij}}(-1)^l\begin{bmatrix}1-a_{ij}\\ l\end{bmatrix}_{q_{ii}^{\frac{l(l-1)}{2}}}[J^{n-1}\otimes a_i^{1-a_{ij}-l}+a_i^{1-a_{ij}-l}\otimes y_i^{1-a_{ij}-l}+$$

$$\sum_{r=1}^{-a_{ij}-l}q_i^{r(1-a_{ij}-l-r)}\begin{bmatrix}1-a_{ij}-l\\ r\end{bmatrix}_{q_{ii}^{\frac{l(l-1)}{2}}}a_i^rJ^{n-1}\otimes a_i^{1-a_{ij}-l-r}y_i^r](J^{n-1}\otimes a_j+a_j\otimes y_j)\times$$

$$[J^{n-1}\otimes a_i^l+a_i^l\otimes y_i^l+\sum_{r=1}^{l-1}q_i^{r(l-r)}\begin{bmatrix}l\\ r\end{bmatrix}_{q_{ii}^{\frac{l(l-1)}{2}}}a_i^rJ^{n-1}\otimes a_i^{l-r}y_i^r]=0。$$

因此在情况(iv)下，Δ 保持关系(5)，其他情况下可以类似证明。同理可证明 Δ 保持关系(6)。因此 Δ 和 ε 可以分别延拓成 $\omega U(D)$ 到 $\omega U(D)\otimes\omega U(D)$，$\omega U(D)$ 到 k 的代数同态，并且对于 $X=a_i,y_h,\bar{y}_h,J$，容易证明

$$(\Delta\otimes I)\Delta(X)=(I\otimes\Delta)\Delta(X),(\varepsilon\otimes I)\Delta(X)=(I\otimes\varepsilon)\Delta(X)。$$

因为 Δ 和 ε 是代数同态，所以对于任意的 $X\in\omega U(D)$，上式恒成立。

引理 5　T 是 $\omega U(D)$ 的自同构。

证明　容易证明 T 保持关系(1)(2)(3)(4)，并且 T 是双射。以下将证明 T 保持关系(5)。

根据 T 的定义和**引理 3**，有

$$\sum_{l=0}^{1-a_{ij}}(-1)^l\begin{bmatrix}1-a_{ij}\\ l\end{bmatrix}_{q^{\frac{l(l-1)}{2}}_{ii}}q_{ij}^lT(a_i{}^{1-a_{ij}-l})T(a_j)T(a_i^l)=$$

$$\sum_{l=0}^{1-a_{ij}}(-1)^l\begin{bmatrix}1-a_{ij}\\ l\end{bmatrix}_{q^{\frac{l(l-1)}{2}}_{ii}}q_{ij}^l(-a_i\bar{y}_i)^l(-a_j\bar{y}_j)(-a_i\bar{y}_i)^{1-a_{ij}-l}=$$

$$\sum_{l=0}^{1-a_{ij}}(-1)^l\begin{bmatrix}1-a_{ij}\\ l\end{bmatrix}_{q^{\frac{l(l-1)}{2}}_{ii}}q_{ij}^l(-1)^{2-a_{ij}}\chi_i(Y_i)\bar{y}_i{}^{1-a_{ij}}\bar{y}_ja_i{}^{1-a_{ij}-l}a_ja_i^l=0。$$

同理，可以证明 T 保持关系(6)。因此，T 是 $\omega U(D)$ 的自同构。

令 $\omega U_1(D)$ 是由 $J^{n-1},a_i,y_m,\bar{y}_m$ 生成的子代数。

定理 6　T 是 $\omega U_1(D)$ 的弱对极，从而 $\omega U_1(D)$ 是弱 $Hopf$ 代数。

证明　对于 $X=J^{n-1},a_i,y_m,\bar{y}_m$，容易证明$(I\cdot T\cdot I)(X)=X,(T\cdot I\cdot T)(X)=T(X)$，

因为 $I\cdot T\cdot I=(\mu\otimes I)\mu(I\otimes T\otimes I)(\Delta\otimes I)\Delta$，从而 $I\cdot T\cdot I$ 是$\omega U_1(D)$ 的线性自同构。为了证明 $(I\cdot T\cdot I)(X)=X$ 对于任意的 $X\in\omega U_1(D)$ 都成立，只需证明对于任意的 $x\in\omega U_1(D)$ 和 y 是$\omega U_1(D)$ 的任意一个生成子，$(I\cdot T\cdot I)(xy)=xy,(I\cdot T\cdot I)(x)=x$ 成立。假设

$(\Delta\otimes I)\Delta(x)=\sum x_{(1)}\otimes x_{(2)}\otimes x_{(3)}$，则$(\Delta\otimes I)\Delta(xJ^{n-1})=\sum x_{(1)}J^{n-1}\otimes x_{(2)}J^{n-1}\otimes x_{(3)}J^{n-1}$，

从而

$$(I\cdot T\cdot I)(xJ^{n-1})=\sum x_{(1)}T(x_{(2)})x_{(3)}J^{n-1}=xJ^{n-1}。$$

(下转第 189 页)