浙江科技学院学报，第25卷第3期，2013年6月
Journal of Zhejiang University of Science and Technology
Vol. 25 No. 3，Jun. 2013

doi：10.3969/j.issn.1671-8798.2013.03.015

线性代数课程创新教学模式的实践

薛有才
（浙江科技学院 理学院，杭州 310023）

摘　要：数学思想方法教学是大学数学教学的核心，数学问题是实现大学创造性教育的关键，数学实验是数学创新教学的催化剂，数学文化环境是数学创新教育的保障。为此，在线性代数课程中进行了思想方法教学模式、问题教学模式、实验教学模式、文化环境教学模式等系列探索，并取得了良好的效果。

关键词：线性代数；创新教育；教学模式

中图分类号：G642.3；O151.2　　**文献标志码**：A　　**文章编号**：1671-8798(2013)03-0232-05

Research on creative teaching mode of linear algebra

XUE Youcai
（School of Sciences，Zhejiang University of Science and Technology，Hangzhou 310023，China）

Abstract：Teaching of mathematics idea and method is the core of mathematical teaching. Mathematical question is the power of mathematical teaching；mathematical experiment is the catalyst of mathematical teaching；mathematics culture environment is the security of innovative education in mathematical teaching. We conducted a serious of explorations in the course of linear algebra on the mode of mathematical thinking，problem solving，laboratory teaching，cultural environment teaching，and evaluation，which achieved good teaching results.

Key words：linear algebra；creative education；teaching mode

数学思想方法的教学是大学数学教学的核心，而数学问题是实现大学创造性教育的关键。线性代数课程中有很多好的数学思想方法，也有许多值得深入思考的好问题。作为大学低年级的一门基础课，线性代数课程如何对学生实行创造性教育，培养学生的创造能力，是教师们一直在探索与实践的重点。笔者试行了线性代数的思想方法教学模式、问题教学模式、实验教学模式、评价模式、文化环境教学模式等系列教学改革的实践与探索，促进了创新教育，得到了学生的认可与赞赏。

收稿日期：2013-01-09
基金项目：浙江科技学院学科交叉预研专项项目(2012JC12Y)
作者简介：薛有才(1958—　)，男，山西省临猗人，教授，主要从事计算数学与数学教育、科技哲学研究。

1　线性代数的思想方法教学模式

数学思想方法是数学的灵魂。学习数学,如果对数学的思想与方法不能领会与掌握,仅仅是记忆了一些公式与进行机械的练习,就不能很好地掌握数学,更谈不上应用数学了。特别是在大学数学的学时被减少了较多的情况下,更应突出大学数学的思想教学,让学生领会大学数学中最本质的东西,以利于学生以后的学习。所以,大学数学教学的根本问题就是数学思想方法的教学。

线性代数课程中有很多好的思想方法,要在教学中一直注重把线性代数的思想方法贯穿在概念教学、定理证明、问题分析中,这样,既突出了数学的思想方法,又把数学思想方法结合在数学的实际问题中,使学生在学到数学知识的同时学到数学的思想与方法。

案例 1　初等变换的思想方法

初等变换是线性代数中非常重要的思想方法之一,可以说是线性代数中的一个核心方法。它涉及解线性方程组、矩阵的秩与逆、向量组的极大线性无关组与秩、线性空间的基与维数、求特征向量、二次型化简等许多线性代数的重要问题。

由于线性方程组是线性代数的核心内容,而解线性方程组的主要方法是消元法,对消元法归纳抽象后可以得到解方程组的初等变换,所以,在线性代数教学过程中应这样处理:首先在线性代数导入课时就从学生熟悉的解三元一次方程组的消元法入手,如通过解三元一次方程组:

$$\begin{cases}2x_1+2x_2-3x_3=9\\x_1+2x_2+x_3=4\\3x_1+9x_2+2x_3=19\end{cases}$$

抽象出“线性方程组初等变换”的思想方法[1]2-4,即用消元法解线性方程组的过程就是反复地将方程组进行以下三种基本变换以化简原方程组:

1)互换方程组中的两个方程的位置;

2)用一个非零的数乘某一个方程;

3)用一个数乘一个方程后加到另一个方程上。

了解线性方程组的初等变换后,就可以通过把方程组保留系数与常数,而删减未知量与运算符号后,即为一个“矩阵形式的方程组”(线性方程组的增广矩阵)的方法引入矩阵,直接得到矩阵的初等变换。对于行列式,在分析“上三角形行列式”的计算方法后说明若能够把一个行列式“化为”上三角形的行列式,则可利用对角线方法求出其值;再回忆解“矩阵形式”线性方程组的方法导入行列式的性质:交换行列式的行或列、用一个非零数乘行列式的某一行(列)、把行列式某一行(列)倍数后加到另一行(列)上。事实上这是“初等变换”思想方法在行列式中的应用。教学实践证明,依此组织行列式性质教学会使行列式的性质变得容易理解和方便记忆。

上述教学过程实际上也是与近些年国际上所提倡的 HPM(history and pedagogy of mathematics,数学史与数学教育)研究有关。因为从中国古代《九章算术》中解方程组的过程,可以猜想(即吴文俊院士所倡导的“复原”方法)到这一思想实际上就是先人们在解线性方程组时所悟到的一种方法。

在建立了初等变换的思想方法之后,可以通过课程教学,如在计算行列式、矩阵化简与求秩、矩阵的分解、求解方程组等过程中不断强调,不断加强这一思想方法的训练,使学生能够熟练掌握这一基本的思想方法。

案例 2　线性相关性的思想方法

线性相关性是线性代数教学中的一个难点,但这一思想却是线性代数中非常重要的思想方法之一,在教学中是通过分析学生熟悉的线性方程组中“方程的独立性”问题引入的[2]。可以通过一个例题说明方程组中有的方程实际上是“多余的”。在解方程组中,通过初等变换会处理掉这些多余的“方程”(把它们化为“0=0”的形式);然后通过把一次方程“简化”为向量,说明一个向量组中有的向量实际上是没有什

么作用的，即“多余的”向量，从而引入向量的线性相关性概念与极大线性无关组的概念，再引入矩阵的行(列)向量组的线性相关性，逐步深入并不断巩固，使学生能够比较深刻地领会线性相关性的思想方法。

数学思想方法教学模式的难点在于突破传统的数学教学模式，把数学看成是一门实验性的归纳科学，而不仅仅看成是一个演绎逻辑系统。教学过程中，对于新的问题要从学生熟知的问题与方法入手进行分析，利用类比、归纳、猜测、合情推理等思维方式进行抽象，要把数学学习的过程看成是数学发明创造过程的“重现”。只有这样，学生才能够领会到活的数学思想方法，而不仅仅是看懂了一个证明或是会解一道题目。数学教学不能限于从“已知”到“求证”的逻辑链条的构建，而是要面对原始情景、思考原始问题，用合情合理的数学驱动学习者的数学思考[3]。

2 线性代数的问题教学模式

创新意识也可以说是一种问题意识，培养良好的问题意识是创新教育的有效途径之一。一切科学研究，毫无例外地都要经历提出问题、分析问题、解决问题的过程。也就是说，科学研究是由问题驱动的。……中国数学没有提出好的数学问题，因而渐渐落伍，与世界数学拉大了距离。……连带之下，中国数学教学也只是要求学生看例题、做习题、答考题，绝少让学生主动地提出问题。于是，数学教学离开问题驱动，创新教育也渐行渐远，成了一句空话。改革的出路是反其道而行之，运用数学被发现时的本真问题，加以提炼、加工，呈现给学生，引导他们进行火热的思考。把数学教学用一系列的问题组织起来，在数学问题驱动下呈现数学[3]。

问题教学模式中最主要的问题有四类：一是在教学过程中围绕教学内容提出的引领教学过程的问题，教学中围绕这一问题并结合数学思想方法教学统率教学过程，使学生对数学有更为深入的了解。这一类问题往往能够引起学生较深入地思考数学的思想与方法，使学生对数学有更深入的了解，并激发学生探索数学的兴趣。这也就是张奠宙先生提出的那些具有启发性的、本原性的、触及数学本质的、能够在教学中起统率作用的问题[3]。二是对课本的一些概念、定理、例习题进行再加工，引导学生通过扩展或引申提出新的问题，让学生学会提出问题的方法。通过这一类问题的学习与训练，逐步引导学生学会独立思考数学问题，提出问题并解决问题，发展他们的创造能力。三是一些批判性的问题，以培养学生的批判性精神与开放性思维。四是应用性问题。

案例3 特征值与特征向量是线性代数中一个重要的思想方法，有非常多的应用。它在线性代数中的一个应用是实对称矩阵对角化问题。在教学中经常采用两种问题引入。一是用学生熟悉的实二次曲线的标准形提出问题：一条实二次曲线的标准形是什么样的？并进一步引申为一个实对称矩阵能否用一个对角矩阵表示？若能够表示，如何表示？然后给出特征值与特征向量的定义，并说明特征值与特征向量具有非常好的应用，而实对称矩阵对角化仅仅是其一种应用。这里既为学生学习特征值与特征向量埋下伏笔，也为学生学习二次型埋下伏笔。另一种方法是从向量的“几何”意义引入。问题是“在线性代数中，一个线性变换能否把一个非零向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 变换为同方向上的向量？也就是对一个线性变换 $y=Ax$ 来说，是否存在一个非零向量 $\boldsymbol{\alpha}$，使得 $A\boldsymbol{\alpha}=\lambda\boldsymbol{\alpha}$”。

这些问题的引入对于引导学生积极思考教学内容起到了很好的作用，引领了整个教学过程，而且也使学生易于理解教学内容，掌握数学的本质。

案例4[4] 设矩阵 A 经初等变换化为：

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&3&1&5&4\\1&2&1&3&3\\3&5&2&8&7\\1&3&2&4&5\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1&0&-1&1&-1\\0&1&1&1&2\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

则矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩为2，令

$$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}2&1&3&1\\3&2&5&3\end{pmatrix}^{\mathrm{T}},\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}1&0&-1&1&-1\\0&1&1&1&2\end{pmatrix}\Rightarrow\boldsymbol{A}=\boldsymbol{BC}。$$

其中,$\boldsymbol{B}$ 为列满秩矩阵,$\boldsymbol{C}$ 为行满秩矩阵。

思考,这个例子能够推广吗?即有问题:设 $\boldsymbol{A}$ 是秩为 r 的 $m\times n$ 矩阵,能否找到秩分别为 m,n 的矩阵 $\boldsymbol{B}$ 与 $r\times n$ 矩阵 $\boldsymbol{C}$,使得 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{BC}$?

案例 5　一个非齐次线性方程组的所有解是否构成一个解向量空间?

这一问题虽然简单,但是对于培养学生批判性思维很有帮助。学生从"一个齐次线性方程组的所有解构成了一个解向量空间"很可能类比出"一个非齐次线性方程组的所有解构成一个解向量空间"的判断,而且教材中一般也不强调这一点。所以,通过此问题让学生对新的数学知识与旧有知识之间进行类比和归纳,分析其具有的相似性质或完全不同的性质,是一种好的教学方法,既能培养学生勤于思考的习惯,也有利于学生对知识归纳整理,在旧问题中发现新问题,发现新矛盾,学会批判性的继承与发展。

培养学生良好的数学问题意识与提出问题的能力是数学创新教育的重要一环。问题教学模式的目的就是要使学生养成善于发现问题、提出问题的良好习惯,从而提高他们的创造能力。正如爱因斯坦所指出的:"提出一个问题,往往比解决一个问题更重要。因为解决问题仅是一个数学上或实验上的技能而已,而提出新的问题、新的可能性,从新的角度看旧的问题,却需要有创造性的想象力。"

3　数学实验教学模式

在现有科学技术条件下,如何发挥科学技术的功能,最大限度地提高教学效果是教育工作者必须深入思考的问题。数学实验实际上就是新时期科学技术应用于数学教育实践中的有益尝试。

在教学过程中,一般把数学实验归为两种类型:一是那些机械性的、计算技巧较强的、计算过程繁琐的问题交由计算机处理,以减轻学生机械计算的负担,把精力集中到数学思想方法的学习上来;二是那些通过数学实验发现问题,解决问题的实验,这类实验是学生真正应用数学思想,通过编程在计算机上进行探索的过程。

案例 6[1]236　利用 MATLAB 的"格式:det(A)"计算方阵 $\boldsymbol{A}$ 的行列式的值。如求方阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&2&1\\-1&2&2&3\\2&3&3&1\\0&1&2&1\end{pmatrix}$的行列式的值。

案例 7[5]　利用 MATLAB 实验验证希尔伯特矩阵的正定性。希尔伯特矩阵元素的表达式为

$$\boldsymbol{H}(i,j)=\frac{1}{i+j-1}$$

其中 i 和 j 分别为其行标和列标,从上式中可以很容易看出:$\boldsymbol{H}(i,j)=\boldsymbol{H}(j,i)$,即希尔伯特矩阵是实对称矩阵。由此可以方便地应用 MATLAB 语言中的函数:hilb(n)生成一个 n 阶的希尔伯特矩阵。希尔伯特矩阵是一个正定的矩阵。

学生通过编程上机实验,作出图像,并通过图像可以看出,二次型

$$f(x,y)=x^2+xy+\frac{1}{3}y^2$$

表示的曲面始终在 XY 平面的上方,这从一个侧面验证了希尔伯特矩阵的正定性,并通过改变函数 hilb(n)中的参数 n 来验证不同的希尔伯特矩阵的正定性。需要说明的是,这里仅仅是通过数学实验对希尔伯特矩阵正定性的"验证",但其正定性还必须通过数学理论来证明。

数学实验课的目的是培养学生应用数学知识分析和解决实际问题的能力,以及应用计算机进行科学计算的能力。对于工科学生来讲,数学建模与数学实验为数学的应用开辟了道路,对于培养学生应用数学的意识,提高应用数学的兴趣和动手能力,培养创新精神和创新能力都具有非常重要的作用。

数学实验课应注意的一个问题是学生表现出对计算机的兴趣往往高于对数学的兴趣,他们更注意计算机的编程过程,而轻视数学建模与数学应用的过程。所以在数学实验课中,一定要注意锻炼学生数学

建模与应用的能力，而数学软件的应用与编程仅仅是一种手段。在数学实验课中，可以通过对同一个问题使用不同的数学模型与方法来分析处理，也可以通过改变模型中的一些参数（如果有的话）来发现问题与规律，以引导学生对数学应用的更深入的探索，提高他们应用数学解决实际问题的能力。

4 数学文化环境教学模式

数学的创新教育，应当有一个好的文化环境。此处讲的数学文化环境，不但包括数学建模辅导与竞赛、数学选修系列课程、数学创新的课外活动、数学读物及其借阅、数学课外提高辅导与讨论、数学的应用环境等，还包括学习氛围，学生之间的互相鼓励与帮助，教师的鼓励与指导，相关的激励措施等。总之，应当为学生创造一个良好的数学创造性学习氛围，使学生能够在这样一个环境中不断提高数学学习水平、应用水平与创新能力。

几年来，浙江科技学院理学院数学教研室坚持开设了系列数学选修课程：数学建模、数学实验、数学文化、大学数学提高班，并结合教师的科研与杭州市的社会发展，指导学生参加"新苗扶持计划"项目，开展丰富多彩的数学课外活动，如积极动员学生参与全国数学建模竞赛与美国大学生数学建模竞赛，参与"挑战杯"等大学生科技竞赛活动；组织数学兴趣活动小组；学院实验室实行开放式管理，组织开放性实验，学生可以按照自己的学习时间随时上机实验等。

另外，数学创新环境还包括学术自由。鼓励学生参加教师的讨论班，鼓励学生独立提出问题，鼓励学生对教学内容进行质疑。

5 结　语

作为本科类大学，不论学校的性质如何，无论是培养未来的科技人才，还是培养未来的卓越工程师，培养学生的创造能力应是教育的关键。如何利用课堂教学的有限资源，提高学生的创造性，值得深入思考与研究。以上是笔者在线性代数课堂教学中所做的初步尝试与探索。其中，大学数学思想方法的教学与培养学生的问题意识，以及寻找与提出好的问题是创造性教育的关键所在。本文旨在抛砖引玉，希望能够有更多的教师投入到大学数学的创新教育的探索与实践中来，使大学数学教学取得更好的成效。

参考文献：

[1] 薛有才，罗敏霞．线性代数（理工类）[M]．北京：机械工业出版社，2010．

[2] 许梅生，薛有才．线性代数[M]．杭州：浙江大学出版社，2008：2-4．

[3] 张奠宙，张荫南．新概念：用问题驱动的数学教学[J]．高等数学研究，2004，7(3)：8-10．

[4] 靳全勤．初等变换的一个应用：矩阵的满秩分解[J]．大学数学，2009，25(5)：195-197．

[5] 王亮，冯国臣，王兵团，等．基于 MATLAB 的线性代数实用教程[M]．北京：科学出版社，2008：145-148．