浙江科技学院学报,第 25 卷第 5 期,2013 年 10 月
Journal of Zhejiang University of Science and Technology
Vol. 25 No. 5, Oct. 2013

doi: 10. 3969/j. issn. 1671-8798. 2013. 05. 001

$\tilde{\rho}$混合序列的一个强大数律

沈建伟

(浙江科技学院 理学院,杭州 310023)

摘　要: 利用随机变量的截尾方法和$\tilde{\rho}$混合序列的三级数定理,得到了矩条件下$\tilde{\rho}$混合序列的一类强大数定律,推广了若干已有的强大数律。

关键词: $\tilde{\rho}$混合序列;强大数律;三级数定理;截尾

中图分类号: O211. 4　　**文献标志码**: A　　**文章编号**: 1671-8798(2013)05-0325-04

A strong law of large numbers for $\tilde{\rho}$-mixing sequence of random variables

SHEN Jianwei

(School of Sciences, Zhejiang University of Science and Technology, Hangzhou 310023, China)

Abstract: A strong law of large numbers for $\tilde{\rho}$-mixing sequence of random variables are obtained under the moment conditions by the truncation methods of random variables and three series theorem of $\tilde{\rho}$-mixing sequence. The results available extend some known theorems.

Key words: $\tilde{\rho}$-mixing sequence; strong law of large numbers; three series theorem; truncation

1　引言及引理

设$\{X_n,n\geqslant 1\}$是定义在概率空间$(\Omega,\mathcal{A},P)$上的随机变量序列,$\mathcal{F}_S=\sigma(X_i,i\in S\subset\mathbb{N})$;$\mathcal{F}_1^n=\sigma(X_i,i\leqslant n)$,$\mathcal{F}_{n+k}^{\infty}=\sigma(X_i,i\geqslant n+k)$为$\sigma$-域。在$\mathcal{A}$中给定$\sigma$-域$\mathcal{F}$和$\mathcal{R}$。令

$$\rho(\mathcal{F},\mathcal{R})=\sup_{X\in L_2(\mathcal{F}),Y\in L_2(\mathcal{R})}\frac{|EXY-EXEY|}{(\mathrm{Var}X\mathrm{Var}Y)^{1/2}}$$

对$k\geqslant 0$,令

收稿日期: 2013-05-03

作者简介: 沈建伟(1972—　),男,浙江省萧山人,讲师,硕士,主要从事概率极限理论研究。

$$\rho(k)=\sup_{n\in\mathbb{N}}\rho(\mathcal{F}_1^n,\mathcal{F}_{n+k}^{\infty})$$

$$\tilde{\rho}(k)=\sup\{\rho(\mathcal{F}_S,\mathcal{F}_T):\text{有限子集 } S,T\subset\mathbb{N},\text{且 } \mathrm{dist}(S,T)\geqslant k\}。\tag{1}$$

显然，$0\leqslant\tilde{\rho}(k+1)\leqslant\tilde{\rho}(k)\leqslant 1$，且$\tilde{\rho}(0)=1$。

定义 1 对随机序列$\{X_n,n\geqslant 1\}$，若$\rho(k)\to 0,k\to\infty$，则称$\{X_n,n\geqslant 1\}$为ρ混合序列。

定义 2 对随机序列$\{X_n,n\geqslant 1\}$，若存在$k\in\mathbb{N}$，使得$\tilde{\rho}(k)<1$，则称$\{X_n,n\geqslant 1\}$为$\tilde{\rho}$混合序列。

ρ混合概念由 Kolmogorov 和 Rozanov[1] 引入，$\tilde{\rho}$混合概念由 Bradley[2] 引入。$\tilde{\rho}$混合序列与ρ混合序列有一定的类似但并不相同，它们互不包含。事实上，在通常的ρ混合系数$\rho(k)$中，式(1)中的S,T分别是$[1,n]$和$[n+k,\infty)$中的子集。另外，$\tilde{\rho}$混合序列只要求存在某个$k\in\mathbb{N}$，使得$\tilde{\rho}(k)<1$，在这一点上要比ρ混合序列的要求$\rho(k)\to 0,k\to\infty$弱得多。因此，$\tilde{\rho}$混合序列是一类极为广泛的相依混合序列。

对于$\tilde{\rho}$混合序列的研究，已取得了不少成果。Bradley[3] 研究了它的极限定理；吴群英[4-6] 得到了$\tilde{\rho}$混合序列的若干收敛性质及其加权和的完全收敛性和强收敛性，并研究了$\tilde{\rho}$混合序列的线性模型M估计的强相合性；王学军、胡舒合[7] 把独立情形的强大数律推广到了$\tilde{\rho}$混合序列部分和的情形；韦静、唐国强[8] 得到了$\tilde{\rho}$混合序列加权和最大值的几乎处处收敛性；胡学平、桂春燕[9] 得到了$\tilde{\rho}$混合序列部分和的若干收敛性质，推广了文献[4]中的结论；郭明乐等[10] 研究了行为$\tilde{\rho}$混合阵列加权和的矩完全收敛性。本研究则从另一角度给出了$\tilde{\rho}$混合序列的一个强大数律。

引理 1[4] 设$\{X_n,n\geqslant 1\}$为$\tilde{\rho}$混合序列，对某个$c>0$，记$X_n^c\triangleq X_nI(|X_n|\leqslant c)$。若

$$\sum_{n=1}^{\infty}P(|X_n|>c)<\infty,\tag{2}$$

$$-\infty<\sum_{n=1}^{\infty}EX_n^c<\infty,\tag{3}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\log^2 n\mathrm{Var}(X_n^c)<\infty,\tag{4}$$

则$\sum\limits_{n=1}^{\infty}X_n$ a. s. 收敛。

2 主要结果

定理 1 设$\{X_n,n\geqslant 1\}$为$\tilde{\rho}$混合序列，$\{a_n,n\geqslant 1\}$为一个正常数列。如果满足下列两个条件之一：

(A) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\log^2 nE\left(\dfrac{|X_n|^{\alpha}}{(a_n)^{\alpha}+|X_n|^{\alpha}}\right)<\infty,0<\alpha\leqslant 1$；

(B) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\log^2 nE\left(\dfrac{|X_n|^{\alpha}}{(a_n)^{\alpha}+a_n|X_n|^{\alpha-1}}\right)<\infty,1\leqslant\alpha\leqslant 2$ 且 $EX_n=0$。

则$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{X_n}{a_n}$ a. s. 收敛。若进一步假定$0<a_n\uparrow\infty$，则由 Kronecker 引理，有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{a_n}\sum_{i=1}^{n}X_n=0,\text{a. s.}$$

推论 1 设$\{X_n,n\geqslant 1\}$为$\tilde{\rho}$混合序列，$0<\alpha\leqslant 2$且$EX_n=0$。$\{a_n,n\geqslant 1\}$为一个常数列且满足$0<a_n\uparrow\infty$。若$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\log^2 nE\left(\left|\dfrac{X_n}{a_n}\right|^{\alpha}\right)<\infty$，则

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{a_n}\sum_{i=1}^{n}X_n=0,\text{a. s.}$$

3　定理的证明

定理 1 的证明　　记 $X_n^{a_n} = X_n I(|X_n| \leqslant a_n)$，则有 $\dfrac{X_n^{a_n}}{a_n} = \dfrac{X_n}{a_n} I\left(\left|\dfrac{X_n}{a_n}\right| \leqslant 1\right)$

由于 $\{X_n, n \geqslant 1\}$ 为 $\tilde{\rho}$ 混合序列，故由 $\tilde{\rho}$ 混合序列的定义知：$\{X_n/a_n, n \geqslant 1\}$ 仍为 $\tilde{\rho}$ 混合序列。所以要证明 $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{X_n}{a_n}$ a. s. 收敛，只需要验证**引理 1** 中的条件(2)、(3) 和(4) 成立即可，其中 $c = 1$。

当 $\alpha > 0$，$|X_n| \geqslant a_n > 0$ 时，有

$$\frac{2|X_n|^{\alpha}}{(a_n)^{\alpha} + |X_n|^{\alpha}} \geqslant 1, \tag{5}$$

从而

$$P(|X_n| \geqslant a_n) = E(I(|X_n| \geqslant a_n)) \leqslant E\left(\frac{2|X_n|^{\alpha}}{(a_n)^{\alpha} + |X_n|^{\alpha}}\right),$$

由条件(A) 可得

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(|X_n| \geqslant a_n) \leqslant 2\sum_{n=1}^{\infty} E\left(\frac{|X_n|^{\alpha}}{(a_n)^{\alpha} + |X_n|^{\alpha}}\right) < \infty。 \tag{6}$$

当 $\alpha \geqslant 1$，$|X_n| \geqslant a_n > 0$ 时，有

$$\frac{2|X_n|^{\alpha}}{(a_n)^{\alpha} + a_n|X_n|^{\alpha-1}} \geqslant 1, \frac{2|X_n|^{\alpha-1}}{(a_n)^{\alpha-1} + |X_n|^{\alpha-1}} \geqslant 1 \tag{7}$$

由条件(B) 可得

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(|X_n| \geqslant a_n) \leqslant 2\sum_{n=1}^{\infty} E\left(\frac{|X_n|^{\alpha}}{(a_n)^{\alpha} + a_n|X_n|^{\alpha-1}}\right) < \infty。 \tag{8}$$

由式(6) 和式(8) 可知**引理 1** 中的条件(2) 成立。

当 $0 < \alpha \leqslant 1$ 时，

$$|EX_n^{a_n}| \leqslant E|X_n| I(|X_n| \leqslant a_n) \leqslant 2a_n E\frac{|X_n|^{\alpha}}{2(a_n)^{\alpha}} I(|X_n| \leqslant a_n) \leqslant$$
$$2a_n E\frac{|X_n|^{\alpha}}{(a_n)^{\alpha} + |X_n|^{\alpha}}。 \tag{9}$$

当 $\alpha \geqslant 1$ 时，由 $EX_n = 0$ 和式(7) 得

$$|EX_n^{a_n}| = |EX_n I(|X_n| \leqslant a_n)| \leqslant E|X_n| I(|X_n| \geqslant a_n) \leqslant$$
$$a_n E\frac{2|X_n|^{\alpha-1}}{(a_n)^{\alpha-1} + |X_n|^{\alpha-1}} \frac{|X_n|}{a_n} \leqslant 2a_n E\frac{|X_n|^{\alpha}}{(a_n)^{\alpha} + a_n|X_n|^{\alpha-1}}。 \tag{10}$$

由式(9) 和式(10) 可知：无论条件(A) 成立或条件(B) 成立，都有 $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{|EX_n^{a_n}|}{a_n} < \infty$。

于是**引理 1** 中的条件(3) 成立。

最后，

$$\sum_{n=1}^{\infty} \log^2 n \frac{\operatorname{Var}(X_n^{a_n})}{a_n^2} \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \log^2 n \frac{E(X_n^{a_n})^2}{a_n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \log^2 n \frac{EX_n^2 I(|X_n| \leqslant a_n)}{a_n^2} \leqslant$$
$$2\sum_{n=1}^{\infty} \log^2 n E\frac{|X_n|^{\alpha}}{2a_n^{\alpha}} I(|X_n| \leqslant a_n)。 \tag{11}$$

当 $0 < \alpha \leqslant 1$ 时，由式(11) 可知：

$$\sum_{n=1}^{\infty} \log^2 n \frac{\operatorname{Var}(X_n^{a_n})}{a_n^2} \leqslant 2\sum_{n=1}^{\infty} \log^2 n E\left(\frac{|X_n|^{\alpha}}{(a_n)^{\alpha} + |X_n|^{\alpha}}\right) < \infty。 \tag{12}$$

当 $1 \leqslant \alpha \leqslant 2$ 时，由式(11) 可知：

$$\sum_{n=1}^{\infty} \log^2 n \frac{\operatorname{Var}(X_n^{a_n})}{a_n^2} \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \log^2 n E\left(\frac{|X_n|^{\alpha}}{(a_n)^{\alpha} + a_n |X_n|^{\alpha-1}}\right) < \infty。 \tag{13}$$

由式(12) 和式(13) 可知：**引理 1** 的条件(4) 成立。

由**引理 1** 可得 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{X_n}{a_n}$ a. s. 收敛。**定理 1** 证毕。

推论 1 的证明由**定理 1** 可知结论是显然的。

参考文献：

[1] Kolmogorov A N, Rozanov Y A. On strong mixing conditions for stationary Gaussian process[J]. Theory of Probability & Its Applications, 1960, 5(2): 204-208.

[2] Bradley R C. Equivalent mixing conditions for random fields[J]. The Annals of Probability, 1993, 21(4): 1921-1926.

[3] Bradley R C. On the spectral density and asymptotic normality of weakly dependent random fields[J]. Journal of Theoretical Probability, 1992, 5(2): 355-373.

[4] 吴群英. ρ混合序列的若干收敛性质[J]. 工程数学学报, 2001, 18(3): 58-64, 50.

[5] 吴群英. ρ混合序列加权和的完全收敛性和强收敛性[J]. 应用数学, 2002, 15(1): 1-4.

[6] 吴群英. $\tilde{\rho}$ 混合线性模型 M 估计的强相合性[J]. 数学物理学报, 2005, 25(1): 41-46.

[7] 王学军, 胡舒合. $\tilde{\rho}$ 混合序列部分和的强大数定律[J]. 数学研究, 2008, 41(1): 91-96.

[8] 韦静, 唐国强. $\tilde{\rho}$ 混合随机变量序列加权和最大值的几乎处处收敛性[J]. 桂林理工大学学报, 2011, 31(4): 633-636.

[9] 胡学平, 桂春燕. $\tilde{\rho}$ 混合序列部分和的若干收敛性质[J]. 数学杂志, 2012, 32(3): 521-528.

[10] Guo M L, Dong J, Ren Y. Complete moment convergence of weighted sums for arrays of rowwise ρ^*-mixing random variables[J]. 应用数学, 2013, 26(1): 18-27.