浙江科技学院学报,第 25 卷第 6 期,2013 年 12 月
Journal of Zhejiang University of Science and Technology
Vol. 25 No. 6, Dec. 2013

doi: 10.3969/j.issn.1671-8798.2013.06.001

环面链环的多项式

陶志雄
(浙江科技学院 理学院,杭州 310023)

摘　要:纽结或者链环多项式的计算通常牵涉递归问题。研究利用二次方程的韦达定理来解决这些递归问题,从而得到环面链环 $T(2,m)$的 Conway 多项式和 Jones 多项式的表达式。

关键词: Conway 多项式;Jones 多项式;环面链环

中图分类号: O189.24　　**文献标志码**: A　　**文章编号**: 1671-8798(2013)06-0405-04

Polynomials of a torus link

TAO Zhixiong
(School of Sciences, Zhejiang University of Science and Technology, Hangzhou 310023, China)

Abstract: Knot or link polynomial calculations often involve recursion problems. This paper solves these problems by using Vieta's formulas for the quadratic equation. From this way, it gives expressions of the Conway polynomial and the Jones polynomial of a torus link $T(2,m)$.

Key words: Conway polynomial; Jones polynomial; torus link

环面纽结 $T(m,n)$(m,n 互素)的 Jones 多项式早已由 Jones 本人利用 Hecke 代数及辫子群理论等给出了公式和证明[1]。公式的给出过程非常艰难和复杂,目前没有几何化的证明[2]。据笔者的调查,没有任何环面链环的 Jones 多项式表达式的研究结果。本研究主要关注环面纽结 $T(2,m)$ 的多项式表示。约定环面链环或者环面纽结 $T(2,m)$ 总表示其有 $|m|$ 个与 m 同号的交叉,利用二次方程的韦达定理等方法给出环面纽结 $T(2,m)$ 的 Conway 多项式和 Jones 多项式的表达式,即有:

定理 1　若 $T(2,m)$, $m \neq 0$ 是两个分支方向相同的环面链环,则

$$\nabla(T(2,m);z) = \left(\frac{\mathrm{sign}(m)}{2}\right)^{|m|-1} \sum_{k=0}^{[(|m|-1)/2]} \sum_{j=0}^{k} C_{|m|}^{2k+1} C_k^j 4^{k-j} z^{|m|+2j-2k-1}。$$

或者

$$\nabla(T(2,m)) = \frac{\mathrm{sign}(m)(1+(-1)^m)+(1-(-1)^m)}{2} z^{(1+(-1)^m)/2} \Big(C_{[|m|/2]}^{(1+(-1)^m)/2} + C_{[|m|/2]+1}^{2+(1+(-1)^m)/2} z^2 + \cdots + C_{[|m|/2]+k}^{2k+(1+(-1)^m)/2} z^{2k} + \cdots + C_{|m|-2}^{|m|-3} z^{|m|-3-(1+(-1)^m)/2} + C_{|m|-1}^{|m|-1} z^{|m|-1-(1+(-1)^m)/2}\Big),$$

收稿日期: 2013-06-01

基金项目: 浙江省自然科学基金资助项目(LY12A01025);浙江省自然科学基金青年基金资助项目(LQ13A010018)

作者简介: 陶志雄(1961—　),男,浙江省绍兴人,副教授,博士,主要从事几何拓扑学研究及大学数学教学。

这里$[x]$表示取整数，$\mathrm{sign}(x)$表示x的符号。第二个公式也适合环面纽结的情形。

定理 2　若$T(2,m)$是 2 个分支的方向相同的环面链环，则其 Jones 多项式为：

$$V(T(2,m);t)=\frac{(-1)^{m-1}t^{(m-1)/2}(t^2+1+t)-t^{(3m+1)/2}}{1+t}。$$

注：如果 2 个分支的方向相反，那么可以参考文献[3]和[4]来修改和利用**定理 2** 的结果。

1　基本知识

定义[1-6]　假设K是定向链环，多项式$\nabla(K;z)\in\mathbb{Z}[z]$，$V(K;t)\in\mathbb{Z}[t^{\pm1}]$定义如下：

1）若K与平凡纽结○同痕，则$\nabla(K;z)=1$，$V(K;t)=1$；

2）若 3 个纽结或链环L_+,L_-,L_0仅在一处不同，而且不同处如图 1 所示，

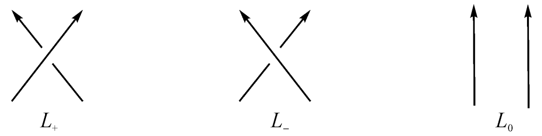

图 1　链环（纽结）L_+,L_-,L_0

Fig. 1　Links(knots) L_+,L_- and L_0

则 2 个多项式分别满足：

$$\nabla(L_+;z)-\nabla(L_-;z)=z\nabla(L_0;z),$$

$$t^{-1}V(L_+;t)-tV(L_-;t)=(\sqrt{t}-1/\sqrt{t})V(L_0;t),$$

那么，这 2 个多项式都是纽结与链环不变量，分别称为 Conway 多项式和 Jones 多项式。

命题[1-2]　环面纽结$T(p,q)$（p,q互素）的 Jones 多项式为：

$$V(T(p,q);t)=\frac{t^{(p-1)(q-1)/2}}{1-t^2}(1-t^{q+1}-t^{p+1}+t^{p+q})。$$

2　定理 1 的证明

为了简化记号，这里有时将$\nabla(T(2,*);z)$简写成$\nabla(T(2,*))$。

显然，$\nabla(T(2,0))=0$，$\nabla(T(2,1))=1$，$\nabla(T(2,2))=z$。当$m>2$时，

$$\nabla(T(2,m))-\nabla(T(2,m-2))=z\nabla(T(2,m-1)),\tag{1}$$

若设$\alpha+\beta=z$，$\alpha\beta=-1$，可知道α,β满足方程：$x^2-zx-1=0$，解方程得

$$\alpha=\frac{1}{2}(z+\sqrt{z^2+4}),\beta=\frac{1}{2}(z-\sqrt{z^2+4}),$$

于是原方程(1)可改写为：

$$\begin{aligned}\nabla(T(2,m))-\alpha\nabla(T(2,m-1))&=\beta(\nabla(T(2,m-1))-\alpha\nabla(T(2,m-2)))=\\&\beta^{m-2}(\nabla(T(2,2))-\alpha\nabla(T(2,1))),\end{aligned}\tag{2}$$

但原方程(1)也可以改写为：

$$\begin{aligned}\nabla(T(2,m))-\beta\nabla(T(2,m-1))&=\alpha(\nabla(T(2,m-1))-\beta\nabla(T(2,m-2)))=\\&\alpha^{m-2}(\nabla(T(2,2))-\beta\nabla(T(2,1))),\end{aligned}\tag{3}$$

(2)$\times\beta-$(3)$\times\alpha$得

$$\nabla(T(2,m))(\beta-\alpha)=\beta^{m-1}(z-\alpha)-\alpha^{m-1}(z-\beta)=\beta^m-\alpha^m,$$

这样

$$\nabla(T(2,m))=\frac{\alpha^m-\beta^m}{\sqrt{z^2+4}},$$

$$\begin{aligned}\alpha^m-\beta^m&=\frac{1}{2^m}[\sum_{j=0}^{m}C_m^j(\sqrt{z^2+4})^jz^{m-j}-\sum_{j=0}^{m}C_m^j(-1)^j(\sqrt{z^2+4})^jz^{m-j}]=\\&\frac{1}{2^m}[\sum_{j=0}^{m}C_m^j(1-(-1)^j)(\sqrt{z^2+4})^jz^{m-j}]\end{aligned}$$

$$\nabla(T(2,m))=\frac{1}{2^m\sqrt{z^2+4}}\sum_{j=0}^{m}C_m^j(1-(-1)^j)(\sqrt{z^2+4})^jz^{m-j}=\frac{1}{2^{m-1}}\sum_{k=0}^{[(m-1)/2]}C_m^{2k+1}(z^2+4)^kz^{m-2k-1}=$$

$$\frac{1}{2^{m-1}}[\sum_{k=0}^{[(m-1)/2]}C_m^{2k+1}(z^2+4)^kz^{m-2k-1}]=\frac{1}{2^{m-1}}\sum_{k=0}^{[(m-1)/2]}\sum_{j=0}^{k}C_m^{2k+1}C_k^j4^{k-j}z^{m+2j-2k-1}。$$

若 $m<0$,则利用$\nabla(T(2,m);z)=\nabla(T(2,-m);-z)$ 即可得证。

利用上面的证明,可以得到一个环面链环的 Conway 多项式的赋值公式,即

推论 $\nabla(T(2,m);\pm 2\sqrt{-1})=(\pm\sqrt{-1})^{m-1}m,m\in\mathbb{Z}$。

读者可以使用归纳法、Conway 多项式的定义和组合数公式 $C_{n+k}^{2k+1}+C_{n+k}^{2k}=C_{n+k+1}^{2k+1}$ 来证明它的 Conway 多项式也可以表示为:

$$\nabla(T(2,2n))=\mathrm{sign}(n)(C_{|n|}^1z+C_{|n|+1}^3z^3+\cdots+C_{|n|+k}^{2k+1}z^{2k+1}+\cdots+C_{2|n|-2}^{2|n|-3}z^{2|n|-3}+C_{2|n|-1}^{2|n|-1}z^{2|n|-1}),$$

$$\nabla(T(2,2n+1))=1+C_{(|2n+1|-1)/2+1}^2z^2+C_{(|2n+1|-1)/2+2}^4z^4+\cdots+C_{(|2n+1|-1)/2+k}^{2k}z^{2k}+\cdots+$$
$$C_{|2n+1|-2}^{|2n+1|-3}z^{|2n+1|-3}+C_{|2n+1|-1}^{|2n+1|-1}z^{|2n+1|-1}。$$

即,$\nabla(T(2,m))=[\mathrm{sign}(m)(1+(-1)^m)+(1-(-1)^m)]/2z^{(1+(-1)^m)/2}(C_{[|m|/2]}^{(1+(-1)^m)/2}+C_{[|m|/2]+1}^{2+(1+(-1)^m)/2}z^2+\cdots+$

$$C_{[|m|/2]+k}^{2k+(1+(-1)^m)/2}z^{2k}+\cdots+C_{|m|-2}^{|m|-3}z^{|m|-3-(1+(-1)^m)/2}+C_{|m|-1}^{|m|-1}z^{|m|-1-(1+(-1)^m)/2})。$$

如果 2 个分支的链环中一个分支颠倒了定向,即 2 个分支方向相反,若 $n\geqslant 0$ 仍表示交叉的符号和个数,则$\nabla(T(2,0))=0$,$\nabla(T(2,1))=1$,当 $n\geqslant 1$ 时,

$$\nabla(T(2,2n))-\nabla(T(2,2n-2))=z,$$
$$\cdots\cdots$$
$$\nabla(T(2,4))-\nabla(T(2,2))=z,$$
$$\nabla(T(2,2))-0=z,$$
$$\nabla(T(2,2n))=nz。$$

若 $n<0$ 表示交叉的符号,同样也得到$\nabla(T(2,2n))=nz$。

3 定理 2 的证明

首先计算 $m\geqslant 0$ 时的 $V(T(2,m);t)$。

由于 $V(T(2,0);t)=-\sqrt{t}-1/\sqrt{t}$,$V(T(2,1);t)=1$,$V(T(2,2);t)=-t^{5/2}-t^{1/2}$,当 $m>2$ 时,

$$t^{-1}V(T(2,m);t)-tV(T(2,m-2);t)=(t^{1/2}-t^{-1/2})V(T(2,m-1);t),$$
$$V(T(2,m);t)=(t^{1/2}-t^{-1/2})tV(T(2,m-1);t)+t^2V(T(2,m-2);t)$$

设 $\alpha+\beta=(t^{1/2}-t^{-1/2})t$,$\alpha\beta=-t^2$,可知道 α,β 满足方程:

$$x^2-(t^{1/2}-t^{-1/2})tx-t^2=0,$$

解方程得
$$\alpha=t^{3/2},\beta=-t^{1/2}。$$

于是原方程可改写为

$$V(T(2,m);t)-\alpha V(T(2,m-1);t)=\beta(V(T(2,m-1);t)-\alpha V(T(2,m-2);t))=$$
$$\beta^{m-2}(V(T(2,2);t)-\alpha V(T(2,1));t),\tag{4}$$

但原方程也可以改写为:

$$V(T(2,m);t)-\beta V(T(2,m-1);t)=\alpha(V(T(2,m-1);t)-\beta V(T(2,m-2));t)=$$
$$\alpha^{m-2}(V(T(2,2))-\beta V(T(2,1))),\tag{5}$$

(4)$\times\beta-$(5)$\times\alpha$ 得

$$V(T(2,m);t)(\beta-\alpha)=\beta^{m-1}(V(T(2,2);t)-\alpha V(T(2,1));t)-\alpha^{m-1}(V(T(2,2);t)-\beta V(T(2,1));t)=$$
$$\beta^{m-1}(-t^{5/2}-t^{1/2}-t^{3/2})-\alpha^{m-1}(-t^{5/2}-t^{1/2}+t^{1/2})=$$
$$(-1)^mt^{m/2}(1+t+t^2)+t^{3m/2+1}。$$

这样

$$V(T(2,m);t)=\frac{(-1)^{m-1}t^{m/2}(1+t+t^2)-t^{3m/2+1}}{\sqrt{t}(1+t)}=\frac{(-1)^{m-1}t^{(m-1)/2}(1+t+t^2)-t^{(3m+1)/2}}{1+t}。$$

显然上述等式适合任何 $m\geqslant 0$ 的整数。对于 $m<0$，由于 $T(2,m)$ 的镜面像是 $T(2,-m)$，且 $V(T(2,m);t)=V(T(2,-m);t^{-1})$，

所以
$$V(T(2,m);t)=\frac{(-1)^{m-1}t^{-(-m-1)/2}(1+t^{-1}+t^{-2})-t^{-(-3m+1)/2}}{1+t^{-1}}=$$
$$\frac{(-1)^{m-1}t^{(m+1)/2}(1+t+t^2)t^{-1}-t^{(3m-1)/2+1}}{1+t}=$$
$$\frac{(-1)^{m-1}t^{(m-1)/2}(1+t+t^2)-t^{(3m+1)/2}}{1+t}。$$

尤其是：
$$V(T(2,2n))=-\frac{t^{(2n-1)/2}(1+t+t^2)+t^{(6n+1)/2}}{1+t}。$$

使用常规的递推方法及环面纽结情形的 Jones 多项式，也可以得出上述环面链环的 Jones 多项式。

由于 $V(T(2,1))=1,V(T(2,2))=-t^{5/2}-t^{1/2}$，当 $m>2$ 时，

$$t^{-1}V(T(2,2n))-tV(T(2,2n-2))=(t^{1/2}-t^{-1/2})V(T(2,2n-1)),$$
$$V(T(2,2n))=t^2V(T(2,2n-2))+t(t^{1/2}-t^{-1/2})V(T(2,2n-1))$$
$$\cdots\cdots$$
$$V(T(2,2))=t^2V(T(2,0))+t(t^{1/2}-t^{-1/2})V(T(2,1))$$

$$V(T(2,2n))=t^{2n}V(T(2,0))+t(t^{1/2}-t^{-1/2})\sum_{j=0}^{n-1}t^{2n-2j-2}V(T(2,2j+1))=$$
$$-t^{2n}(\sqrt{t}+1/\sqrt{t})+t(t^{1/2}-t^{-1/2})\sum_{j=0}^{n-1}t^{2n-2j-2}\frac{t^j}{1-t^2}(1-t^3-t^{2j+2}+t^{2j+3})=$$
$$-t^{2n-1/2}(t+1)-t^{1/2}\sum_{j=0}^{n-1}\frac{t^{2n-j-2}}{1+t}(1-t^3-t^{2j+2}+t^{2j+3})=$$
$$-t^{2n-1/2}(t+1)-t^{1/2}\frac{1}{1+t}(t^{n+1}+t^n+t^{n-1}-t^{2n+1}-2t^{2n}-t^{2n-1}+t^{3n})=$$
$$-\frac{t^{(2n-1)/2}(t^2+1+t)+t^{(6n+1)/2}}{1+t}。$$

参考文献：

[1] Jones V F R. Hecke algebra representations of braid groups and link polynomials[J]. Annals of Mathematics，1987，126(2)：335-388.

[2] Adams C C. The knot book：An Elementary Introduction to the Mathematical Theory of Knots[M]. Providence，Rhode Island：American Mathematical Society，2004.

[3] Lickorish W B R，Millett K C. The reversing result for the Jones polynomial[J]. Pacific Journal of Mathematics，1986，124(1)：173-176.

[4] Murasugi K. Knot Theory and Its Applications[M]. Boston，Basel，Berlin：Birkhäuser，1996.

[5] 陶志雄. 颠倒分支定向的链环的 Jones 多项式[J]. 浙江科技学院学报，2011，23(6)：443-444.

[6] Kauffman L H. On knots(Annals of Mathematics Studies 115)[M]. Princeton：Princeton University Press，1987.